1. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x-2)(x^2+x+3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x-2)(x^2+x+3) = 0$

$\therefore x = 2\ ,\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

2. 연립부등식 $\begin{cases} x \le \dfrac{2}{5}x + 3 \\ 4x - 3 > 3x - 5 \end{cases}$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 정수를 a , 가장 큰 정수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x \le \dfrac{2}{5}x + 3$

양변에 5를 곱하면 $5x \le 2x + 15$

$3x \le 15$, $x \le 5$

$4x - 3 > 3x - 5$, $x > -2$

$-2 < x \le 5$

$a = -1,\ b = 5$

$\therefore a + b = -1 + 5 = 4$

3. 부등식 $6(x-3) < 4x+17 \leq 6(x-2)$ 를 만족시키는 x 의 값 중 가장 큰 정수와 가장 작은 정수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$6(x-3) < 4x+17 \leq 6(x-2)$ 를 정리하면

$$\begin{cases} 6(x-3) < 4x+17 \\ 4x+17 \leq 6(x-2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 6x-4x < 17+18 \\ 4x-6x \leq -12-17 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x < \dfrac{35}{2} \\ x \geq \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

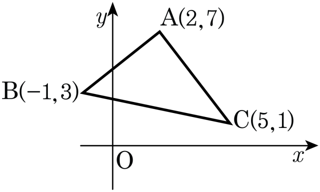
$\dfrac{29}{2} \leq x < \dfrac{35}{2}$ 이므로

가장 큰 정수는 17

가장 작은 정수는 15

따라서 두 수의 차는 $17-15=2$ 이다.

4. 세 점 A(2, 7), B(−1 , 3), C(5, 1) 을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 다음 중 두 점 A, G 를 지나는 직선의 방정식은?



① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$

④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

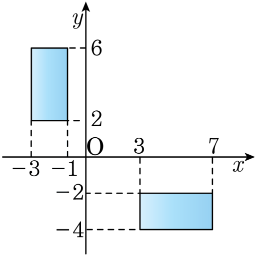
해설

두 점 A, G 를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점 A 와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점(2, 7) 과(2, 2) 를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

5. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\dfrac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ $-\dfrac{7}{8}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

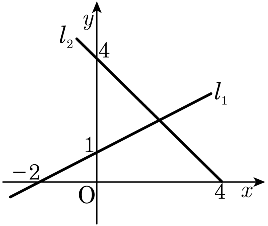
해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$ 이므로

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{-3-4}{5-(-2)}=-1$

6. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2 의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 이때, a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 l_1 은 x절편이 -2이고,

y절편이 1이므로 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$에서

$x - 2y = -2 \cdots\cdots$ ㉠

직선 l_2는 x절편이 4이고, y절편이 4이므로

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$에서

$x + y = 4 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $x = 2, y = 2$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x$

$\therefore\ a = 1$

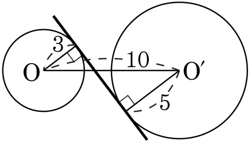
7. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.
$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$
$\therefore\ k = 0$
이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 2$

8. 다음 그림의 두 원 O와 O′에서 공통내접선의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{10^2 - (3+5)^2} = 6$

9. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로

세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면

$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots ㉠$

$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots ㉡$

$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots ㉢$

㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면

$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$

$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$

$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

10. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 20%증가하였고, B제품은 25%증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

11. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-a \geq x+4 \\ 7(x-1) \leq 5x+9 \end{cases}$ 를 만족하는 정수의 개수가 4개일 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $0 < a \leq 1$

해설

$2x+a \geq x-4$ 를 풀면 $x \geq a+4$ 이고,
$7(x-1) \leq 5x+9$ 를 풀면 $7x-7 \leq 5x+9$, $2x \leq 16$, $x \leq 8$ 이다.
따라서 $a+4 \leq x \leq 8$ 을 만족하는 정수가 4 개 즉 5, 6, 7, 8 이어야 하므로
$4 < a+4 \leq 5$, 따라서 $0 < a \leq 1$ 이다.

12. 이차부등식 $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq a \leq 2$ ② $0 < a < 2$ ③ $-2 < a < 2$

④ $-2 < a < 0$ ⑤ $-2 \leq a \leq 0$

해설

모든 실수 x에 대해 성립하려면
판별식이 0보다 작거나 같아야 한다
$D' = a^2 - 2a \leq 0$에서
$a(a-2) \leq 0$
$0 \leq a \leq 2$

13. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $2<x<3$ 일 때, a, b, c 의 부호에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $a>0,\ b<0,\ c<0$

② $a>0,\ b<0,\ c>0$

③ $a<0,\ b>0,\ c<0$

④ $a<0,\ b>0,\ c>0$

⑤ $a<0,\ b<0,\ c<0$

해설

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c>0 &\Leftrightarrow 2<x<3 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-3)<0 \\ &\Leftrightarrow a(x^2-5x+6)>0\ (a<0) \\ &\Leftrightarrow ax^2-5ax+6a>0 \end{aligned}$$

$\therefore\ b=-5a>0,\ c=6a<0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0$

14. 부등식 $2|x-1|+3|x+1|<6$의 해가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{7}{5}$ ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

i) $x \geq 1$일 때 $2x-2+3x+3<6$에서
$5x+1<6$이므로 $x<1$
즉 해는 없다.

ii) $-1 \leq x < 1$일 때,
$-2x+2+3x+3<6$에서 $x<1$
즉 $-1 \leq x < 1$

iii) $x<-1$일 때, $-2x+2-3x-3<6$에서
$-5x-1<6$이므로 $x>-\frac{7}{5}$
즉 $-\frac{7}{5}<x<-1$

따라서 해는 $-\frac{7}{5}<x<1$이므로
$a=-\frac{7}{5}$, $b=1$이므로
$a+b=-\frac{2}{5}$

15. 세 변의 길이가 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$

$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots ①$

한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots ②$

①과 ②에서 $2<x<4$

$\therefore\ a=2,\ b=4$

따라서 $a+b=6$

16. 두 점 $A(-3,0)$, $B(3,0)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 20$ 을 만족시키는 점 P 의 자취를 구하면?

① $x = 1$ ② $x = 2$ ③ $x^2 + y^2 = 1$

④ $x^2 + y^2 = 2$ ⑤ $x^2 + y^2 = 4$

해설

점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$(x+3)^3 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 20$

$2x^2 + 2y^2 = 2$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$

17. $x^2+y^2=1$과 직선 $y=ax+1$과의 교점을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 1이 되는 양수 a의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

해설

원점 O에서 현 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 다음의 그림에서

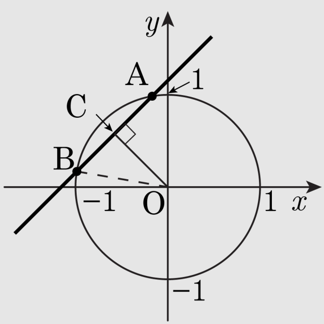
$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

($\because$ 피타고라스의 정리) 즉, O에서 직선 $y=ax+1$에 이르는 거리 d가

$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ 3a^2+3=4\ ,\ a^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



18. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{8}{9}$ ⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

ⅰ) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ⅱ) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0,\ a(9a+8)=0,$

$\therefore a=0,\ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$

19. 두 부등식 $3x-4<x+6$ 과 $1-3x\le -5$를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3x-4<x+6,\ \ x<5$

$1-3x\le -5,\ \ 2\le x<5$

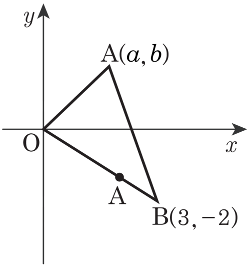
따라서 모두 만족하는 수는 $2\le x<5$이므로 가장 작은 정수는 2 이다.

20. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(3, −2)가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고 $\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 이다.



21. 두 점 $A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8}<t<\frac{5}{6}$

해설

$A(3,-2)$, $B(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t}, \frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$$=(-5t+3-3t, t-2+2t)=(-8t+3, 3t-2)$$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$

22. 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, $c=ka^2$ 이 성립한다. 이 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ 을 표준형으로 나타내면

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

따라서, 중심이 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이므로

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하기 위해서는

$\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 이어야 한다.

(i) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\left|-\frac{b}{2}\right|$ 에서 $|a|=|b|$

$\therefore a^2=b^2 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $\left|-\frac{a}{2}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ 의 양변을 제곱하면 $\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

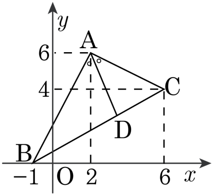
$\therefore b^2=4c \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡ 에 대입하면 $a^2=4c$

$\therefore c=\frac{1}{4}a^2$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

23. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2, 6)$, $B(-1, 0)$, $C(6, 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라고 할 때, 점 D 의 좌표는?



① $\left(2, \frac{6}{5}\right)$　② $\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$　③ $\left(\frac{14}{5}, 2\right)$

④ $\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$　⑤ $\left(\frac{18}{5}, \frac{14}{5}\right)$

해설

점 D 는 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$,

$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로

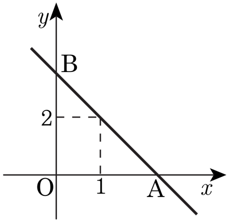
$\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$

따라서 점 D 는 선분 BC 를 3 : 2 로 내분하는 점이므로

점 D 의 좌표는 $\left(\frac{18-2}{3+2}, \frac{12+0}{3+2}\right)$

$\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)$

24. 평면위의 점 (1, 2) 를 지나는 직선과 x축, y축과의 교점을 각각 A, B 라고 하고 원점을 O라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

A(a, 0), B(0, b)이라 하면

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 점 (1, 2)를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$이다.

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$에서 ($a>0, b>0$산술기하)

$2\sqrt{\frac{2}{ab}}\leq 1$

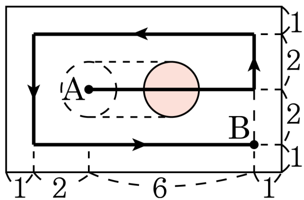
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2}{ab}\leq\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{ab}{2}\geq 4 \therefore ab\geq 8$이다.

여기서 $\triangle$OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}ab\geq 4$이므로

최솟값은 4이다.

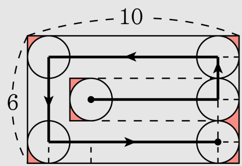
25. 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 6 인 오른쪽 그림과 같은 직사각형의 내부에서 반지름의 길이가 1 인 원이 지나간 자리에는 형광 페인트가 칠해진다고 한다. 원의 중심이 그림과 같이 A 부터 B 까지 화살표 방향의 경로를 따라 움직일 때, 직사각형의 영역 중 형광 페인트가 칠해지지 않는 부분의 넓이는? (단, 경로를 구성하는 모든 선분은 직사각형의 변에 평행하거나 수직이다.)



① 0
② $10-\dfrac{5}{2}\pi$
③ $8-2\pi$
④ $6-\dfrac{3}{2}\pi$
⑤ $4-\pi$

해설

반지름의 길이가 1 인 원이 화살표 방향을 따라 이동할 때 지나지 않는 부분은 다음 그림에서 어두운 부분이다.



따라서 그 넓이는 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 반지름의 길이가 1 인 원을 제외한 부분의 넓이의 2 배와 같다.
즉 $2(4-\pi)$