

1. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 4x < x + 4 \\ 3x - 1 \leq 5x + 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$$\begin{cases} 4x < x + 4 \\ 3x - 1 \leq 5x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 4 \\ 3x - 5x \leq 7 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x \geq -4 \end{cases}$$

따라서 $-4 \leq x < \frac{4}{3}$ 를 만족하는 정수는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 의 6개이다.

4. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 3(x-2) > 2x+5 \\ 3x-4 < 2x+9 \end{cases}$$

- ① $10 < x < 12$ ② $11 < x < 14$ ③ $11 < x < 13$
④ $10 < x < 13$ ⑤ $9 < x < 15$

해설

$$\begin{aligned} \text{i) } & 3(x-2) > 2x+5 \\ & \Rightarrow 3x-6 > 2x+5 \\ & \Rightarrow x > 11 \\ \text{ii) } & 3x-4 < 2x+9 \\ & \Rightarrow x < 13 \\ \therefore & 11 < x < 13 \end{aligned}$$

5. 연립부등식

$$\begin{cases} x-4 > 3x-8 \\ 2x-a > x+5 \end{cases}$$
가 해를 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $a > -2$

③ $a \leq -3$

④ $a < -3$

⑤ $a > -3$

해설

$$x-4 > 3x-8, 2 > x$$

$$2x-a > x+5, x > a+5$$

해가 존재하기 위해서 $a+5 < 2$

$$\therefore a < -3$$

6. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9 - x)$ 개, 복숭아의 개수 : x 개

$$2800 \leq 200(9 - x) + 500x \leq 3600$$

$$\begin{cases} 2800 \leq 200(9 - x) + 500x \\ 200(9 - x) + 500x \leq 3600 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{10}{3} \leq x \leq 6$$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

7. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$ 이 성립하지 않을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$

④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x 에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면 $a \leq 0$ 이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$ 이어야 한다.
따라서 $a(a + 4) < 0$ 이므로 $-4 < a < 0$ 이고
 $a = 0$ 일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

8. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$ 을 만족하는 한 자리의 자연수 x 의 개수는?

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 4개
- ④ 6개
- ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
 $ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
 $ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
 $b = a, c = -2a \cdots (가)$
(가)를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
 $-2ax^2 - ax - a > 0, 2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
 $D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
 $2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

9. 양의 실수 a 에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$ 의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$ 을 만족할 때, a 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
 ④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$$-x^2+7x-10 \geq 0$$

$$x^2-7x+10 \leq 0$$

$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

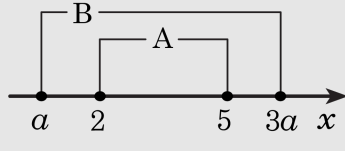
$$2 \leq x \leq 5$$

$$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$$

$$(x-a)(x-3a) \leq 0$$

$$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2, 3a \geq 5$ 이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

10. $2x - 1 > 0$, $x^2 - 3x - 4 < 0$ 를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

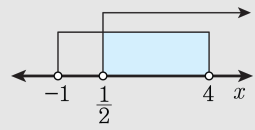
해설

$$2x - 1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$(x + 1)(x - 4) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 4 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$



㉠, ㉡의 공통 부분은

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4$$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3 개다.

11. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$
- ③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$x(x+6) = x^2 + 6x$
 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$
 $x^2 + 6x = X$ 로 놓으면
 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$
 $X(X+8) + 15 = 0,$
 $X^2 + 8X + 15 = 0$
 $(X+3)(X+5) = 0$
 $\therefore X = -3, X = -5$
ⓐ : $X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$
 $x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$
ⓑ : $X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$
 $(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$

12. 실계수 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \gamma$ 라 하면

$$(1+i)(1-i)\gamma = -2, \quad 2\gamma = -2$$

$$\therefore \gamma = -1$$

$$(1+i) + (1-i) + \gamma = -a = 1$$

$$\therefore a = -1$$

$$(1+i)(1-i) + (1-i)\gamma + \gamma(1+i) = 0, \quad b = 0$$

$$\therefore a+b = -1$$

13. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

14. 200m운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

- ① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
 $3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
 $x + y = 200$
$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분
 $\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3} / \text{분} = \frac{0.4\text{km}}{3} \times 60 / \text{시간} = 8 \text{ km/h}$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$ 라 할 때,

다음 중 a 또는 b 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{3}$
⑤ -1

③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \cdots ① \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0, x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = 1$

$\therefore y = \pm 1, x = \mp 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

16. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

18. 부등식 $x^2 - |x| - 12 \geq 0$ 을 풀면?

① $x \leq -4$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 3$

④ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

⑤ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 5$

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

주어진 부등식은 $x^2 - x - 12 \geq 0$, $(x + 3)(x - 4) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

이 때, $x \geq 0$ 과 $\textcircled{\text{㉠}}$ 의 공통 범위를 구하면 다음 수직선에서 $x \geq 4$

(ii) $x < 0$ 일 때, $x^2 + x - 12 \geq 0$, $(x + 4)(x - 3) \geq 0$

$\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

이 때, $x < 0$ 과 $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 공통 범위를 구하면 $x \leq -4$

따라서, $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

19. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + (a^2 - 5a - 6)x - a + 1 = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a 의 값을 모두 더하면?

- ① 15
- ② 17
- ③ 19
- ④ 20
- ⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) < 0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) < 0 이므로
 $-a + 1 < 0 \quad \therefore a > 1 \cdots \textcircled{1}$
(두 근의 합) ≥ 0 이므로
 $-(a^2 - 5a - 6) \geq 0$
 $a^2 - 5a - 6 \leq 0$
 $(a - 6)(a + 1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq a \leq 6 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = 2, 3, 4, 5, 6$
 $\therefore 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$

20. 평지의 공원에 둘레의 길이는 200 m로 일정하고 넓이는 900 m^2 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로 최대 길이는?

- ① 40 m
- ② 50 m
- ③ 90 m
- ④ 100 m
- ⑤ 150 m

해설

화단의 가로 길이를 $x\text{ m}$ 라고 하면
세로의 길이는 $(100 - x)\text{ m}$ 이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
 $x > 0$, $100 - x > 0$ 에서 $0 < x < 100 \cdots$ (가)
 900 m^2 이상이므로
 $x(100 - x) \geq 900$
 $x^2 - 100x + 900 \leq 0$, $(x - 10)(x - 90) \leq 0$
 $\therefore 10 \leq x \leq 90$
이것은 (가)를 만족하므로
가로의 최대 길이는 90 m이다.

21. 세 변의 길이가 $x-1$, x , $x+1$ 인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x 의 값의 범위가 $a < x < b$ 라 할 때, 방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1$, x , $x+1$ 은 삼각형의 세 변이므로
 $x-1 > 0$, $x > 0$, $x+1 > 0$, $x-1+x > x+1 \therefore x > 2 \dots\dots ㉠$
한편, 둔각삼각형이 되려면
 $(x-1)^2 + x^2 < (x+1)^2$
 $x^2 - 4x < 0$ 에서 $0 < x < 4 \dots\dots ㉡$
㉠, ㉡에서 $2 < x < 4$
 $\therefore a = 2$, $b = 4$
따라서 $ax^2 - 3x + b = 0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$

22. 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k < 7$

② $-1 \leq k \leq 2$

③ $-5 \leq k \leq -2$

④ $-7 < k \leq -1$

⑤ $-7 < k \leq -3$

해설

이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의

두 근이 모두 1보다 크므로

$f(x) = x^2 + 2kx + 6 - k$ 로 놓으면

(i) $D \geq 0$ 이므로

$$k^2 + k - 6 \geq 0$$

$$(k + 3)(k - 2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -3, k \geq 2$$

(ii) $x^2 + 2kx + 6 - k = (x + k)^2 + 6 - k - k^2$ 에서

$$-k > 1$$

$$\therefore k < -1$$

(iii) $f(1) > 0$ 이므로

$$1 + 2k + 6 - k > 0$$

$$\therefore k > -7$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서

$$\therefore -7 < k \leq -3$$

23. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

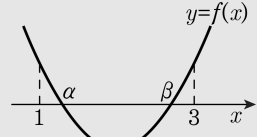
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
 $f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
 $\therefore a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
 $x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
 $\therefore 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4, \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

24. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$ 의 두 근이 -1 과 -2 일 때, 다른 두 근을 α, β 라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$ 라 하면 $-1, -2$ 가 근이므로
 $f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$
 $\therefore B = 2$
 $f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0, -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore A = -1$
 $\therefore A + B = -1 + 2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $\therefore (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근이다.
 $\therefore \alpha\beta = 3 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$

25. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$

㉤ $\omega\overline{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc) \\ x^3 - 1 &= 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc) \\ \therefore \text{근과 계수와의 관계에 의해} \\ \omega + \overline{\omega} &= -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots \text{㉢}(\times), \text{㉤}(\bigcirc) \\ \omega + \overline{\omega} &= -1 \text{ 이므로} \\ \omega^2 + \omega + 1 &= \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots \text{㉥}(\bigcirc) \\ \omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} &= (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega} \\ &= \omega + \frac{1}{\omega} = -1 \\ (\because \omega^2 + \omega + 1 &= 0) \cdots \text{㉢}(\bigcirc) \end{aligned}$$

26. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 가 3개일 때, 상수

a 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$
④ $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

해설

$$\frac{x}{2} - \frac{a}{4} \geq \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \text{ 에서 } x \geq a - \frac{1}{2}$$

$$3x - 1 \geq 5x - 7 \text{ 에서 } x \leq 3$$

$$\therefore a - \frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

연립부등식을 만족하는 정수 x 가 3개이려면

$$0 < a - \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$$

27. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식	$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$	의 해는 없다.
㉡ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식	$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$	의 해는 $x > a$ 이다.
㉢ $a > b$ 일 때, 연립부등식	$\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$	의 해는 없다.
㉣ $a < b$ 일 때, 연립부등식	$\begin{cases} x < -a + 1 \\ x - 1 > -b \end{cases}$	의 해는 없다.
㉤ $a = b$ 일 때, 연립부등식	$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$	의 해는 1개이다.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤은 모두 옳다.
㉣ $a < b$ 의 양변에 -1 을 곱하면 $-a > -b$
 $-a > -b$ 의 양변에 같은 수 1 을 더하면 $1 - a > 1 - b$
$$\begin{cases} x < -a + 1 \\ x - 1 > -b \end{cases} \quad \text{을 정리하면} \quad \begin{cases} x < -a + 1 \\ x > -b + 1 \end{cases}$$

그런데 위에서 $1 - b < 1 - a$ 가 성립되었기 때문에 $-b + 1 < x < -a + 1$ 이 성립한다.
따라서 해가 있다.

28. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$ 의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{7}$

해설

$$(i) \ x < -\frac{3x-a}{4}, 4x < -3x+a$$

$$\therefore x < \frac{a}{7}$$

$$(ii) \ -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}, -3x < 2-a$$

$$\therefore x > \frac{a-2}{3}$$

$$\therefore \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$$

$$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}, a = 1$$

$$\frac{a}{7} = b, b = \frac{1}{7}$$

$$\therefore ab = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$$

29. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y = 2[x] + 3$, $y = 3[x - 2] + 5$ 를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x 에 대하여 $x + y$ 의 범위를 구하면?

① $13 < x + y < 14$

② $14 < x + y < 15$

③ $-4 < x + y < 4$

④ $15 < x + y < 16$

⑤ $x + y = 16.4$

해설

$$2[x] + 3 = 3[x - 2] + 5, \quad 2[x] + 3 = 3([x] - 2) + 5$$

$$\therefore [x] = 4$$

x 가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$$y = 2[x] + 3 = 11 \text{ 이므로 } 15 < x + y < 16$$

30. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 중 한 근만이 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두근 사이에 존재할 때, 실수 k 의 범위는?

- ① $2 < k < 4$ ② $1 < k < 6$ ③ $5 < k < 8$
 ④ $5 < k < 12$ ⑤ $8 < k < 12$

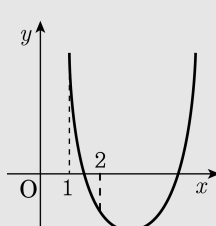
해설

$f(x) = x^2 - 6x + k$ 에서 그래프의 중심축이 $x = 3$ 이므로 다음 그림과 같은 형태로 그래프가 그려질 때 주어진 조건을 만족한다.

$$f(1) = k - 5 > 0, k > 5$$

$$f(2) = k - 8 < 0, k < 8$$

$$\therefore 5 < k < 8$$



31. 삼차방정식 $x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12} = 0$ 의 세 근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, $\alpha \leq m \leq \gamma$ 인 정수 m 의 개수를 구하면?

- ① 23개 ② 24개 ③ 25개 ④ 26개 ⑤ 27개

해설

$f(x) = x^3 - (7 \cdot 2^3)x^2 + (7 \cdot 2^7)x - 2^{12}$ 이라 할 때 $f(2^3) = f(2^4) = f(2^5) = 0$ 이므로
 $f(x) = (x - 2^3)(x - 2^4)(x - 2^5)$
 $\alpha < \beta < \gamma$ 에서 $\alpha = 2^3, \gamma = 2^5$ 이므로
 $2^3 \leq m \leq 2^5$
 $\therefore$ 정수 m 의 개수는 $2^5 - 2^3 + 1 = 25$

32. a, b, c, d 는 정수이고, $a < 2b, b < 3c, c < 4d, d < 100$ 을 만족시킬 때, a 의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a 의 최댓값은 b, c, d 가 각각 최대일 때이다.
 d 의 최댓값은 99이고,
 $c < 4 \cdot 99 = 396$ 이므로 c 의 최댓값은 395,
 $b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b 의 최댓값은 1184,
 $a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a 의 최댓값은 2367

33. $A = 2(x + m)$, $B = 5x + 4n$, $C = 3x - 2n$ 에 대하여 연립부등식 $A \leq B \leq C$ 를 풀었는데, 실수로 m 과 n 의 값을 바꾸어 푸는 바람에 해가 $8 \leq x \leq 21$ 이 되었다. 이 부등식을 올바르게 풀었을 때의 $A \leq B \leq C$ 를 만족하는 해의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A = 2(x + m)$, $B = 5x + 4n$, $C = 3x - 2n$ 에 대하여 $A \leq B \leq C$ 를 풀면,

$$\begin{cases} 2(x + m) \leq 5x + 4n & \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}(m - 2n) \\ 5x + 4n \leq 3x - 2n & \Rightarrow x \leq -3n \end{cases}$$

$\frac{2}{3}(m - 2n) \leq x \leq -3n$ 에서 잘못하여 m 과 n 의 값을 바꾸어 풀었으므로,

$\frac{2}{3}(n - 2m) \leq x \leq -3m$ 이 되고 이 해집합이 $8 \leq x \leq 21$ 과 동일하므로,

$$\begin{cases} -3m = 21 & \Rightarrow m = -7 \\ \frac{2}{3}(n - 2m) = 8 & \Rightarrow n = -2 \end{cases}$$

따라서 올바른 해를 구하면

$$\frac{2}{3}(-7 - 2 \times (-2)) \leq x \leq -3 \times (-2) \text{ 이 되어}$$

$-2 \leq x \leq 6$ 이고, 이를 만족하는 해의 최솟값은 -2 이다.