1. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서

$x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-10=0$, $(t+5)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 4x < x+4 \\ 3x-1 \le 5x+7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$\begin{cases} 4x < x+4 \\ 3x-1 \le 5x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 4 \\ 3x-5x \le 7+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ x \ge -4 \end{cases}$

따라서 $-4 \le x < \frac{4}{3}$ 를 만족하는 정수는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$ 의 6 개이다.

4. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 3(x-2) > 2x+5 \\ 3x-4 < 2x+9 \end{cases}$$

① $10 < x < 12$　② $11 < x < 14$　③ $11 < x < 13$

④ $10 < x < 13$　⑤ $9 < x < 15$

해설

i) $3(x-2) > 2x+5$

$\Rightarrow\ 3x-6 > 2x+5$

$\Rightarrow\ x > 11$

ii) $3x-4 < 2x+9$

$\Rightarrow\ x < 13$

$\therefore\ 11 < x < 13$

5. 연립부등식

$$\begin{cases} x-4>3x-8 \\ 2x-a>x+5 \end{cases}$$

가 해를 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a<-2$ ② $a>-2$ ③ $a\le -3$

④ $a<-3$ ⑤ $a>-3$

해설

$x-4>3x-8$, $2>x$

$2x-a>x+5$, $x>a+5$

해가 존재하기 위해서 $a+5<2$

$\therefore a<-3$

6. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x) + 500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x) + 500x \\ 200(9-x) + 500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \dfrac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$

④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

8. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$(가)
(가)를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$ 의 9개이다.

9. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$

$x^2-7x+10 \leq 0$

$(x-2)(x-5) \leq 0$

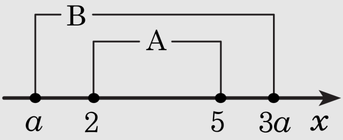
$2 \leq x \leq 5$

$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$

$(x-a)(x-3a) \leq 0$

$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

10. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

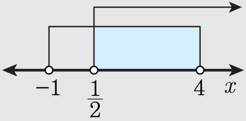
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ ⋯⋯ ㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

11. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

① $x=-2$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$

② $x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$ 또는 $x=-5$

③ $x=-2\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{6}$

④ $x=-3\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{6}i$

⑤ $x=-1$ 또는 $x=-5$ 또는 $-3\pm\sqrt{6}$

해설

$x(x+6)=x^2+6x$

$(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$

$x^2+6x=X$ 로 놓으면

$x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$

$X(X+8)+15=0,$

$X^2+8X+15=0$

$(X+3)(X+5)=0$

$\therefore\ X=-3, X=-5$

㉠ : $X=-3 \Rightarrow\ x^2+6x+3=0,$

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

㉡ : $X=-5 \Rightarrow\ x^2+6x+5=0,$

$(x+5)(x+1)=0,\ x=-1,-5$

12. 실계수 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+2=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

세 근을 $1+i, 1-i, \gamma$ 라 하면

$(1+i)(1-i)\gamma=-2,\ \ 2\gamma=-2$

$\therefore\ \ \gamma=-1$

$(1+i)+(1-i)+\gamma=-a=1$

$\therefore\ \ a=-1$

$(1+i)(1-i)+(1-i)\gamma+\gamma(1+i)=0,\ \ b=0$

$\therefore\ \ a+b=-1$

13. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$

14. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h

④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\dfrac{400}{3}$m/분

$$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분} = \frac{0.4\,\text{km}}{3}\times 60/\text{시간} = 8\,\text{km/h}$$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a, y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0, x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$ 를 ②에 대입하면 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm 1, x=\mp 1$ (복호동순)

ii) $x=-2y$ 를 ②에 대입하면 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은 $\frac{1}{3}$

16. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a\cdots① \\ xy=a\cdots② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

18. 부등식 $x^2 - |x| - 12 \geq 0$을 풀면?

① $x \leq -4$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 3$

④ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

⑤ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 5$

해설

(i) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로

주어진 부등식은 $x^2 - x - 12 \geq 0$, $(x+3)(x-4) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 4 \cdots$ ㉠

이 때, $x \geq 0$과 ㉠의 공통 범위를 구하면 다음 수직선에서 $x \geq 4$

(ii) $x < 0$일 때, $x^2 + x - 12 \geq 0$, $(x+4)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 3 \cdots$ ㉡

이 때, $x < 0$ 과 ㉡의 공통 범위를 구하면 $x \leq -4$

따라서, $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) <0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) <0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots ①$
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6)\geq 0$
$a^2-5a-6\leq 0$
$(a-6)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 6 \cdots ②$
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

20. 평지의 공원에 둘레의 길이는 200 m 로 일정하고 넓이는 900 m^2 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① 40 m ② 50 m ③ 90 m

④ 100 m ⑤ 150 m

해설

화단의 가로 길이를 x m 라고 하면
세로의 길이는 $(100 - x)$ m 이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x > 0,\ 100 - x > 0$ 에서 $0 < x < 100 \cdots$ (가)
900 m^2 이상이므로
$x(100 - x) \geq 900$
$x^2 - 100x + 900 \leq 0, (x - 10)(x - 90) \leq 0$
$\therefore 10 \leq x \leq 90$
이것은 (가)를 만족하므로
가로의 최대 길이는 90 m 이다.

21. 세 변의 길이가 $x-1$, x, $x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a < x < b$라 할 때, 방정식 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1$, x, $x+1$은 삼각형의 세 변이므로

$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$, $x-1+x>x+1$ $\therefore$ $x>2$ ······㉠

한편, 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0$에서 $0<x<4$······㉡

㉠, ㉡에서 $2<x<4$

$\therefore a=2$, $b=4$

따라서 $ax^2-3x+b=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$$

22. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면

(i) $D \ge 0$ 이므로

$k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3, k \ge 2$

(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서

$-k > 1$

$\therefore k < -1$

(iii) $f(1) > 0$ 이므로

$1+2k+6-k > 0$

$\therefore k > -7$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서

$\therefore -7 < k \le -3$

23. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

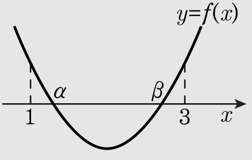
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

24. 방정식 $x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B=0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α,β라 하자. 이 때, $A+B-\alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=x^4+Ax^3-7x^2-Ax+3B$라 하면 $-1,-2$가 근이므로

$f(-1)=1-A-7+A+3B=0$

$\therefore\ B=2$

$f(-2)=16-8A-28+2A+3B=0,\ -6A+3B-12=0 \quad \therefore\ A=-1$

$\therefore\ A+B=-1+2=1\cdots\cdots$ ㉠

$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2-4x+3)=0$

따라서, 다른 두 근은 $x^2-4x+3=0$의 근이다.

$\therefore\ \alpha\beta=3\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A+B-\alpha\beta=1-3=-2$

25. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$	㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$	㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$
㉤ $\omega\overline{\omega} = 1$	㉥ $\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots$ ㉠(○)

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ㉡(○)

$\therefore$근과 계수와의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots$ ㉣(×), ㉤(○)

$\omega + \overline{\omega} = -1$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots$ ㉢(○)

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668}\omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots$ ㉥(○)

26. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8} \\ 3x - 1 \geq 5x - 7 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x가 3개일 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{1}{2}$ ③ $0 \leq a < 1$

④ $\dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{2} \leq a < \dfrac{3}{2}$

해설

$\dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{4} \geq \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{8}$ 에서 $x \geq a - \dfrac{1}{2}$

$3x - 1 \geq 5x - 7$ 에서 $x \leq 3$

$\therefore\ a - \dfrac{1}{2} \leq x \leq 3$

연립부등식을 만족하는 정수 x가 3개이려면

$0 < a - \dfrac{1}{2} \leq 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} < a \leq \dfrac{3}{2}$

27. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉡ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 의 해는 $x > a$ 이다.
㉢ $a > b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉣ $a < b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉤ $a = b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 1개이다.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤은 모두 옳다.

㉣ $a < b$ 의 양변에 -1 을 곱하면 $-a > -b$

$-a > -b$ 의 양변에 같은 수 1 을 더하면 $1 - a > 1 - b$

$\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 을 정리하면 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x > -b+1 \end{cases}$

그런데 위에서 $1 - b < 1 - a$ 가 성립되었기 때문에 $-b + 1 < x < -a + 1$ 이 성립한다.

따라서 해가 있다.

28. 연립부등식 $x < -\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$의 해가 $-\frac{1}{3} < x < b$일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{7}$

해설

(i) $x < -\frac{3x-a}{4}$, $4x < -3x+a$

$\therefore\ x < \frac{a}{7}$

(ii) $-\frac{3x-a}{4} < \frac{1}{2}$, $-3x < 2-a$

$\therefore\ x > \frac{a-2}{3}$

$\therefore\ \frac{a-2}{3} < x < \frac{a}{7}$

$\frac{a-2}{3} = -\frac{1}{3}$, $a = 1$

$\frac{a}{7} = b$, $b = \frac{1}{7}$

$\therefore\ ab = 1 \times \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

29. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y=2[x]+3$, $y=3[x-2]+5$를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x에 대하여 $x+y$의 범위를 구하면?

① $13 < x+y < 14$

② $14 < x+y < 15$

③ $-4 < x+y < 4$

④ $15 < x+y < 16$

⑤ $x+y=16.4$

해설

$2[x]+3=3[x-2]+5$, $2[x]+3=3([x]-2)+5$

$\therefore [x]=4$

x가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$y=2[x]+3=11$이므로 $15 < x+y < 16$

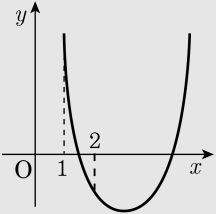
30. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근 중 한 근만이 $x^2-3x+2=0$ 의 두근 사이에 존재할 때, 실수 k의 범위는?

① $2<k<4$ ② $1<k<6$ ③ $5<k<8$

④ $5<k<12$ ⑤ $8<k<12$

해설

$f(x)=x^2-6x+k$ 에서 그래프의 중심축이 $x=3$이므로 다음 그림과 같은 형태로 그래프가 그려질 때 주어진 조건을 만족한다.



$f(1)=k-5>0,\ k>5$

$f(2)=k-8<0,\ k<8$

$\therefore\ 5<k<8$

31. 삼차방정식 $x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}=0$의 세 근을 $\alpha, \beta, \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, $\alpha \le m \le \gamma$인 정수 m의 개수를 구하면?

① 23 개 ② 24 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}$이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3 \le m \le 2^5$

$\therefore$ 정수 m의 개수는 $2^5-2^3+1=25$

32. a, b, c, d는 정수이고, $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 b, c, d가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

33. $A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 연립부등식 $A \le B \le C$ 를 풀었는데, 실수로 m 과 n 의 값을 바꾸어 푸는 바람에 해가 $8 \le x \le 21$ 이 되었다. 이 부등식을 올바르게 풀었을 때의 $A \le B \le C$ 를 만족하는 해의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 $A \le B \le C$ 를 풀면,

$$\begin{cases} 2(x+m) \le 5x+4n & \Rightarrow \quad x \ge \dfrac{2}{3}(m-2n) \\ 5x+4n \le 3x-2n & \Rightarrow \quad x \le -3n \end{cases}$$

$\dfrac{2}{3}(m-2n) \le x \le -3n$ 에서 잘못하여 m 과 n 의 값을 바꾸어 풀었으므로,

$\dfrac{2}{3}(n-2m) \le x \le -3m$ 이 되고 이 해집합이 $8 \le x \le 21$ 과 동일하므로,

$$\begin{cases} -3m = 21 & \Rightarrow \quad m = -7 \\ \dfrac{2}{3}(n-2m) = 8 & \Rightarrow \quad n = -2 \end{cases}$$

따라서 올바른 해를 구하면

$\dfrac{2}{3}\{-7-2\times(-2)\} \le x \le -3\times(-2)$ 이 되어

$-2 \le x \le 6$ 이고, 이를 만족하는 해의 최솟값은 -2 이다.