

1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$ 인 모든 실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x - 3)^2 \geq 0$, (실수) $^2 \geq 0$ 이므로
∴ ⑤ 모든 실수

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0 \\ |x - 1| \leq 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

- ① $-3 \leq x \leq 2$ ② $-2 \leq x \leq 2$ ③ $-1 \leq x \leq 2$
④ $0 \leq x \leq 2$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 + x - 6 \leq 0$ 에서
 $(x + 3)(x - 2) \leq 0$
 $-3 \leq x \leq 2 \cdots (가)$
 $|x - 1| \leq 3$ 에서
 $-3 \leq x - 1 \leq 3$
 $-2 \leq x \leq 4 \cdots (나)$
 $(가), (나)$ 에서 $-2 \leq x \leq 2$

3. 세 점 A(2, 1), B(4, 3), C(a, 0)에 대하여 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-2)^2 + 1^2}, \overline{BC} = \sqrt{(a-4)^2 + 3^2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(a-2)^2 + 1 = (a-4)^2 + 9$$

$$4a = 20$$

$$\therefore a = 5$$

4. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

주어진 조건에서,

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$$

$$= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$$

$$18x + 18y - 54 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

5. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

6. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

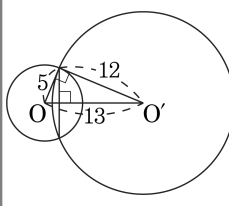
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

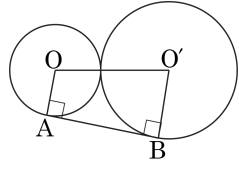
$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



7. 다음 그림의 두 원 O 와 O' 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?
(단, $\overline{OO'} = 5\text{ cm}$, $\overline{OA} = 2\text{ cm}$, $\overline{O'B} = 3\text{ cm}$ 이다.)



- ① $\sqrt{6}\text{ cm}$ ② $2\sqrt{5}\text{ cm}$ ③ $2\sqrt{6}\text{ cm}$
④ $\sqrt{5}\text{ cm}$ ⑤ $3\sqrt{5}\text{ cm}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3 - 2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$$

8. 부등식 $x^2 - 3|x| - 4 > 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x < -4$ 또는 $x > 4$ ② $x < -1$ 또는 $x > 4$
③ $x < 1$ 또는 $x > -4$ ④ $-1 < x < 4$
⑤ $-1 < x < 3$

해설

부등식에 절댓값이 있으므로
(i) $x \geq 0$
 $x^2 - 3x - 4 > 0$
 $(x + 1)(x - 4) > 0$
 $x < -1$ 또는 $x > 4$
 $x \geq 0$ 이므로 $x > 4$
(ii) $x < 0$
 $x^2 + 3x - 4 > 0$
 $(x - 1)(x + 4) > 0$
 $x < -4$ 또는 $x > 1$
 $x < 0$ 이므로 $x < -4$
(i) (ii)로부터 $x < -4$ 또는 $x > 4$

9. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$ 를 풀면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$$\begin{aligned} [x]^2 &\geq [x+2] \text{ 에서 } [x]^2 \geq [x] + 2 \\ [x]^2 - [x] - 2 &\geq 0, ([x] - 2)([x] + 1) \geq 0 \\ \therefore [x] &\leq -1 \text{ 또는 } [x] \geq 2 \\ \therefore x &< 0 \text{ 또는 } x \geq 2 \end{aligned}$$

10. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$ 을 만족하는 실수 m 의 범위는 $a \leq m \leq b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$x^2 - 2mx - m \geq 0 \text{ 이}$$

항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$$

$$m(m + 1) \leq 0, -1 \leq m \leq 0$$

$$\therefore a + b = (-1) + 0 = -1$$

11. a 가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$, $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a 의 범위는 ?

- ① $-1 < a < 4$
② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$
③ $-1 \leq a \leq 4$
④ $-1 < a \leq 0$ 또는 $3 \leq a < 4$
⑤ $3 \leq x \leq 4$

해설

$$x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

①에서 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

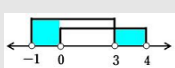
②에서 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a + 1)(a - 3) < 0$$

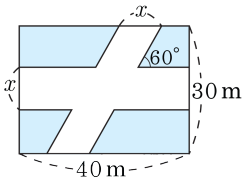
$$\therefore -1 < a < 3$$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$$\therefore -1 < a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4$$

12. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 60° 로 교차하도록 만들었다. 이때, 남은 땅의 넓이가 600 m^2 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



- ① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면
 $S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$
 $\therefore x^2 - 70x + 600 \geq 0$
 $(x - 10)(x - 60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는
 $x \geq 60$ ($0 < x < 30$) 이 된다.
 그러므로 도로폭의 최대 길이는
 $0 < x \leq 10$ 이므로 10m이다.

13. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-5 \leq k < 1$ ② $-2 < k \leq 3$ ③ $-7 < k \leq 1$
④ $1 < k \leq 5$ ⑤ $1 \leq k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서
 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$
(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때
 $-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.
(ii) $k-1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때
 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k-1 < 0$
 $\therefore k < 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서
 $(k+7)(k-1) < 0$
 $\therefore -7 < k < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$
(i), (ii) 에서 $-7 < k \leq 1$

14. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \leq (a - 1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$

② $a > -1$

③ $a \geq -1$

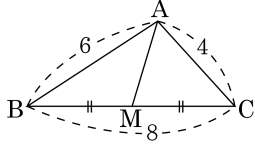
④ $a < -1$

⑤ $a \leq -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a - 1)x - 3$ 이라 두어,
 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) \leq 0$ 되도록 하자.
 $f(0) \leq 0$ 그리고 $f(1) \leq 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
 $f(1) = 1 - (a - 1) - 3 \leq 0$ 에서 $a \geq -1$

15. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로
 $6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$
 $36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
 $\therefore \overline{AM}^2 = 10$

16. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a + b의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ & \quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값은
a = 1, b = 3일 때 최소이다.
∴ a + b = 4

17. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$3x - y - 6 = 0 \text{ , } \quad 3x - y + k = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선

$3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

18. 실수 a, b 와 두 원

$$A : (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$B : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 에 대하여}$$

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a + b = -1$

② $a + b = 1$

③ $a - b = 0$

④ $a^2 + b^2 = 1$

⑤ $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로
두 원의 공통현이
원B 의 중심인 (1, 1) 을 지나야 한다.
공통현의 방정식은
 $(a-1)x + (b-1)y + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 점 (1, 1) 을 지나므로
 $(a-1) \times 1 + (b-1) \times 1 + 1 = 0$
 $\therefore a + b = 1$

19. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 을
표준형으로 고치면 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ 이므로
중심이 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에 이르는 거리 d 는
$$\frac{|1 - (-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

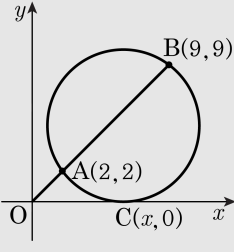
따라서 원 위의 점에서 직선 $x - y + 3 = 0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
 $d - (\text{반지름의 길이}) = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

20. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

21. 부등식 $a(x^2 - 2x + 1) > 2(x^2 - 2x - 2)$ 를 만족하는 실수 x 가 존재할 때, 상수 a 의 범위는?
- ① $a > 2$ ② $a \geq 2$ ③ $a < 2$
- ④ a 는 모든 실수 ⑤ $a < \pm 2$

해설

$a = 2$ 일 때, $6 > 0$ 이므로 x 는 모든 실수
 $a \neq 2$ 일 때,
 $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + a + 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $\frac{D}{4} = (a - 2)^2 - (a - 2)(a + 4) = -6(a - 2)$ 이므로
i) $a > 2$ 이면, x 는 모든 실수
ii) $a < 2$ 이면, $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 근을
 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면
부등식의 해는 $\alpha < x < \beta$ 이므로 x 값이 존재한다.
 $\therefore a$ 는 모든 실수

22. 이차방정식 $x^2 + mx + m + 1 = 0$ 의 한 근은 -1 과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1 과 2 사이에 있도록 m 의 값의 범위를 정하면?

- ① $m < -1$ ② $-\frac{5}{3} < m < -1$ ③ $-\frac{5}{2} < m < 1$
④ $-\frac{5}{3} < m < 0$ ⑤ $-\frac{5}{2} < m < 0$

해설

$x^2 + mx + m + 1 = f(x)$ 라 하면,
 $f(-1) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(2) > 0$
 $\therefore 2 > 0, m + 1 < 0 \quad 2m + 2 < 0, 3m + 5 > 0$
위 네 부등식을 연립하면
 $\therefore -\frac{5}{3} < m < -1$

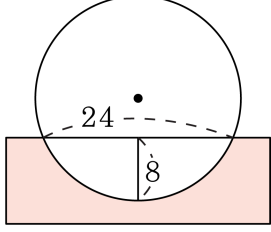
23. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

- ① $O\left(\frac{5}{8}, 0\right)$
- ② $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$
- ③ $O\left(0, \frac{5}{8}\right)$
- ④ $O\left(0, \frac{8}{5}\right)$
- ⑤ $O(0, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
 $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
 $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}, \overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
 $\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \dots$ ①
 $\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
 $\sqrt{(x - 5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \dots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}, y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ 이다.

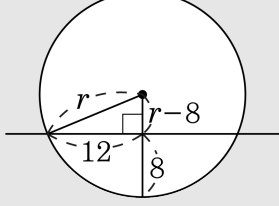
24. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



- ① $6\sqrt{3}$ ② 13 ③ $8\sqrt{3}$ ④ 16 ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를 r 라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
 $r^2 = 12^2 + (r - 8)^2$
 $r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
 $\therefore r = 13$



25. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

- ① 33
- ② 35
- ③ 45
- ④ 49
- ⑤ 55

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을 $y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m + 1| = \sqrt{5(m^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m - 1)(m + 2) = 0$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

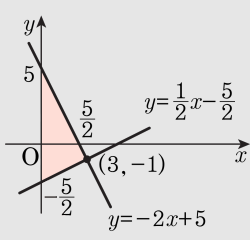
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4}$$

$$\therefore 4S = 45$$



26. 점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 $P(a, b)$, $Q(a, 0)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0, b > 0$ 이라 하면

$\triangle POQ$ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$$

$$ab \leq \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$