1. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다

② $x = 3$

③ $x \neq 3$인 모든실수

④ $-3 < x < 3$

⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, $\quad$ (실수)$^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + x - 6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$　② $-2 \le x \le 2$　③ $-1 \le x \le 2$

④ $0 \le x \le 2$　⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2 + x - 6 \le 0$ 에서

$(x+3)(x-2) \le 0$

$-3 \le x \le 2 \cdots$ (가)

$|x-1| \le 3$ 에서

$-3 \le x - 1 \le 3$

$-2 \le x \le 4 \cdots$ (나)

(가), (나) 에서 $-2 \le x \le 2$

3. 세 점 $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(a,0)$에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{AC}=\sqrt{(a-2)^2+1^2}$, $\overline{BC}=\sqrt{(a-4)^2+3^2}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

$(a-2)^2+1=(a-4)^2+9$

$4a=20$

$\therefore\ a=5$

4. 세 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ -3)$, C$(5,\ 3)$에 대하여 등식 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=2\overline{\mathrm{CP}}^2$을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax+y+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면
주어진 조건에서,
$(x+1)^2+y^2+(x-2)^2+(y+3)^2$
$=2\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$
$2x^2-2x+2y^2+6y+14$
$=2(x^2-10x+y^2-6y+34)$
$18x+18y-54=0$
$\Rightarrow\quad x+y-3=0$
$\therefore\ a+b=1+(-3)=-2$

5. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$

② $2x-2y+3=0$

③ $2x-2y-3=0$

④ $2x+2y-3=0$

⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

6. 두 원 O와 O′의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

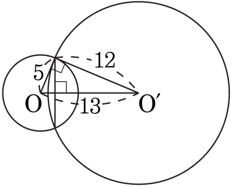
① $\frac{60}{13}$　② $\frac{90}{13}$　③ $\frac{120}{13}$　④ $\frac{150}{13}$　⑤ $\frac{180}{13}$

해설

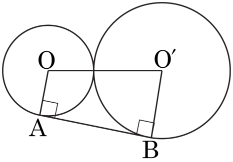
다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면
$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore \ x = \frac{120}{13}$$



7. 다음 그림의 두 원 O 와 O′ 에서 공통 접선 $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{OO'} = 5\,\text{cm}$, $\overline{OA} = 2\,\text{cm}$, $\overline{O'B} = 3\,\text{cm}$ 이다.)



① $\sqrt{6}\,\text{cm}$
② $2\sqrt{5}\,\text{cm}$
③ $2\sqrt{6}\,\text{cm}$
④ $\sqrt{5}\,\text{cm}$
⑤ $3\sqrt{5}\,\text{cm}$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$

8. 부등식 $x^2 - 3|x| - 4 > 0$의 해를 구하면?

① $x < -4$ 또는 $x > 4$
② $x < -1$ 또는 $x > 4$
③ $x < 1$ 또는 $x > -4$
④ $-1 < x < 4$
⑤ $-1 < x < 3$

해설

부등식에 절댓값이 있으므로

(i) $x \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 > 0$

$(x+1)(x-4) > 0$

$x < -1$ 또는 $x > 4$

$x \geq 0$이므로 $x > 4$

(ii) $x < 0$

$x^2 + 3x - 4 > 0$

$(x-1)(x+4) > 0$

$x < -4$ 또는 $x > 1$

$x < 0$이므로 $x < -4$

(i) (ii) 로부터 $x < -4$ 또는 $x > 4$

9. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$를 풀면? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$
② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$
③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$
④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$
⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$[x]^2 \geq [x+2]$에서 $[x]^2 \geq [x]+2$

$[x]^2 - [x] - 2 \geq 0$, $([x]-2)([x]+1) \geq 0$

$\therefore [x] \leq -1$ 또는 $[x] \geq 2$

$\therefore x < 0$ 또는 $x \geq 2$

10. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m\geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a\leq m\leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m\geq 0$이
항상 성립하려면 판별시 $D\leq 0$

$$\frac{D}{4}=m^2+m\leq 0$$

$m(m+1)\leq 0,\ -1\leq m\leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

11. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots ㉠$

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

$\therefore\ 0<a<4$

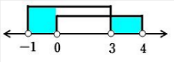
㉡에서 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

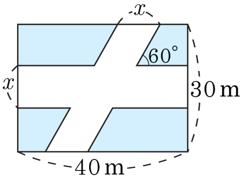
$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

12. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 40 m, 30 m 인 직사각형꼴의 땅에 같은 폭의 두 도로를 $60°$로 교차하도록 만들었다. 이 때, 남은 땅의 넓이가 $600\,\text{m}^2$ 이상이 되도록 할 때, 도로 폭의 최대 길이는?



① 4m ② 6m ③ 8m ④ 10m ⑤ 12m

해설

남은 땅의 넓이를 S 라 하면

$S = 40 \times 30 - (40x + 30x - x^2) \geq 600$

$\therefore\ x^2 - 70x + 600 \geq 0$

$(x-10)(x-60) \geq 0$ 에서 $x \leq 10$ 또는

$x \geq 60\ (0 < x < 30)$ 이 된다.

그러므로 도로폭의 최대 길이는

$0 < x \leq 10$ 이므로 10 m 이다.

13. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 \le k < 1$　② $-2 < k \le 3$　③ $-7 < k \le 1$

④ $1 < k \le 5$　⑤ $1 \le k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서

$(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$

(i) $k - 1 = 0$, 즉 $k = 1$ 일 때

$-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k - 1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때

주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k - 1 < 0$

$\therefore k < 1 \cdots$ ㉠

한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서

$(k+7)(k-1) < 0$

$\therefore -7 < k < 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$

(i), (ii) 에서 $-7 < k \le 1$

14. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

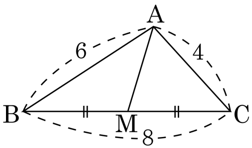
① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \ge -1$

④ $a < -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

15. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore\ \overline{AM}^2=10$

16. 세 점 $A(1,\ 6)$, $B(-2,\ 2)$, $C(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $P(a,\ b)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$

$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$

$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$

이때, a, b는 실수이므로

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$의 값은

$a=1$, $b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

17. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$$3x-y-6=0\ ,\qquad 3x-y+k=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3\times2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

18. 실수 a, b 와 두 원

$\mathrm{A} : (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

$\mathrm{B} : (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$

② $a+b=1$

③ $a-b=0$

④ $a^2+b^2=1$

⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(1,\ 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(a-1)x+(b-1)y+1=0 \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로

$(a-1)\times 1+(b-1)\times 1+1=0$

$\therefore\ a+b=1$

19. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

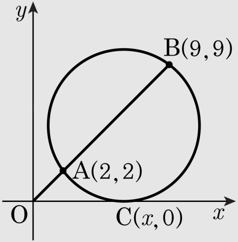
따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

20. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\dfrac{9}{2}$ ② 5 ③ $\dfrac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\dfrac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36 \quad x = 6$

21. 부등식 $a(x^2-2x+1)>2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a>2$ ② $a\ge 2$ ③ $a<2$

④ a는 모든 실수 ⑤ $a<\pm 2$

해설

$a=2$일 때, $6>0$이므로 x는 모든 실수

$a\ne 2$일 때,

$(a-2)x^2-2(a-2)x+a+4=0\cdots$ ㉠에서

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(a+4)=-6(a-2)$이므로

i) $a>2$이면, x는 모든 실수

ii) $a<2$이면, $\dfrac{D}{4}>0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha<x<\beta$이므로 x값이 존재한다.

$\therefore$ a는 모든 실수

22. 이차방정식 $x^2+mx+m+1=0$ 의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있도록 m의 값의 범위를 정하면?

① $m<-1$ ② $-\frac{5}{3}<m<-1$ ③ $-\frac{5}{2}<m<1$

④ $-\frac{5}{3}<m<0$ ⑤ $-\frac{5}{2}<m<0$

해설

$x^2+mx+m+1=f(x)$ 라 하면,

$f(-1)>0,\quad f(0)<0,\quad f(1)<0,\quad f(2)>0$

$\therefore\quad 2>0,\quad m+1<0\quad 2m+2<0,\quad 3m+5>0$

위 네 부등식을 연립하면

$\therefore\ -\frac{5}{3}<m<-1$

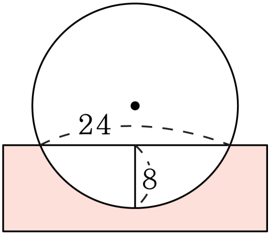
23. 세 점 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $C(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$ ② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$ ③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$ ⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

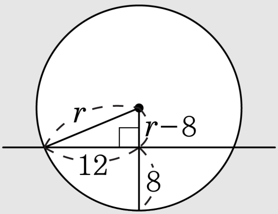
24. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



① $6\sqrt{3}$　② 13　③ $8\sqrt{3}$　④ 16　⑤ $12\sqrt{3}$

해설

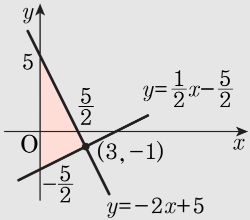
다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를
r라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$
$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
$\therefore r = 13$



25. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설



접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(3, -1)$ 에서
원에 그은 접선의 방정식을 $y+1=m(x-3)$ 이라 하자.
이 때, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y+1=m(x-3)$,
즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가
반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}\,,\ |3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$, $y=-2x+5$

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{45}{4}$$

$\therefore 4S=45$

26. 점 P(a, b) 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때, 점 P(a, b), Q(a, 0), O(0, 0) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 최대 넓이는?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

a, b 의 부호와 상관 없으므로

$a > 0$, $b > 0$ 이라 하면

$\triangle$POQ 의 넓이 : $\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab$

P 가 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 이므로 $a^2 + b^2 = 1$

산술기하조건을 이용하면,

$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times b^2} = 2ab$

$ab \leq \frac{1}{2}$

$\therefore$ 넓이의 최댓값 : $\frac{1}{4}$