1. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

3. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

4. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

5. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

6. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$ ② $x^2-4x+3<0$

③ $x^2-6x+5<0$ ④ $x^2-4x+3\leqq 0$

⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(i) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$

$x>-1$ $\therefore -1<x<1$

(ii) $1\leq x<3$일 때, $x-1-x+3<6$

$2<6$ $\therefore 1\leq x<3$

(iii) $x\geq 3$일 때, $x-1+x-3<6$

$x<5$ $\therefore 3\leq x<5$

$\therefore -1<x<5$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

7. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$의 해가 $-4 < x < 2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x+4)(x-2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

8. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

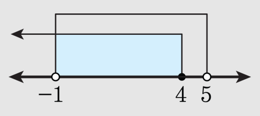
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

9. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2-8a+52}$

$= 6\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10 (\because a>0)$

10. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$　② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$　④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ Q(0,\ 6)$

11. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0)$, $(2,6)$, $(6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2\cdot3-6\cdot6|=15$

12. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서
$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$
$\therefore x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1$
$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

14. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
$x,\ y$가 실수이므로 $x + y = 0,\ x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2,\ y = -2$
$\therefore\ xy = -4$

15. x에 대한 부등식 $x(x+1) < a(x+1)-1$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 범위는?

① $a \le -3$ 또는 $a \ge 1$　　② $-3 \le a \le 1$

③ $a < -3$ 또는 $a > 1$　　④ $-3 < a < 1$

⑤ $-1 \le a \le 3$

해설

$x(x+1) < a(x+1)-1$을 전개하여 이항하면 $x^2+(1-a)x-a+1 < 0$
이차항의 계수가 양수이므로 판별식 $D \le 0$이면 부등식의 해가 없다.

$D = (1-a)^2 + 4(a-1) \le 0$

$(a-1)(a+3) \le 0$

$\therefore \ -3 \le a \le 1$

16. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$　　② $-3<x<1$　　③ $x<2,\ x>3$

④ $-1<x<2$　　⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면

$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.

$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$

준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서

$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<2$

17. 부등식 $x^2-4|x|+3<0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개
④ 3 개　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2-4|x|+3<0$에서 $|x|^2-4|x|+3<0$
$(|x|-1)(|x|-3)<0$
$1<|x|<3$
따라서, 정수 $x=2,\ -2$

18. 이차부등식 $[x]^2+[x]-12\le 0$의 해가 $a\le x<b$일 때, $a+b$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$[x]^2+[x]-12\le 0$에서

$([x]+4)([x]-3)\le 0$

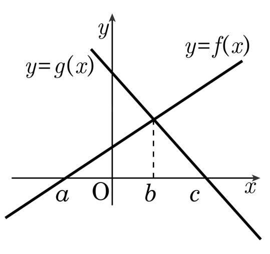
$\therefore -4\le [x]\le 3$

$x=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4\le x<4$

따라서 $a=-4,\ b=4$이므로 $a+b=0$이다

19. 두 개의 일차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차부등식 $f(x)g(x) \geq 0$ 의 해는?



① $a \leq x \leq b$　② $a \leq x \leq c$

③ $b \leq x \leq c$　④ $x \leq b,\ x \geq c$

⑤ $x \leq a,\ x \geq c$

해설

$f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지의 경우가 있다.
$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ 또는 $f(x) \leq 0$, $g(x) \leq 0$
그런데 그래프에서 $f(x) \leq 0,\ g(x) \leq 0$의 경우는 없으므로 $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$을 만족하는 x의 범위를 구하면 된다.
주어진 함수의 그래프를 살펴 보면
$x \leq a$일 때, $f(x) \leq 0$, $g(x) \geq 0$
$a \leq x \leq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$
$x \geq c$일 때, $f(x) \geq 0,\ g(x) \leq 0$
따라서 구하는 해는 $a \leq x \leq c$

20. 직선 $y = 2x$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(3, 1)$ 에서 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$ 라고 할 때, $\alpha\beta$ 를 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $\mathrm{P}\ (\alpha, 2\alpha)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 2)^2 + (2\alpha)^2 = (\alpha - 3)^3 + (2\alpha - 1)^2$

$-4\alpha + 4 = -6\alpha - 4\alpha + 10$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \ \beta = 2$

21. 좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(x,\ 0)$, $C(3,\ 1)$에 대하여 $\angle ABC$가 직각일 때, 실수 x의 값의 합은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\triangle ABC$는 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$이 성립한다.
$(x+1)^2 + 4 + (x-3)^2 + 1 = 16 + 1$
$x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의하여 실수 x의 값의 합은 2이다.

22. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면
네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

23. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$
따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4 개이다

24. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면
$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은
$f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1,\ x = 1,\ x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때,
$f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \le -1,\ x \ge 3$

25. 세 점 $A(1,\ 4)$, $B(-2,\ 3)$, $C(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $D(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

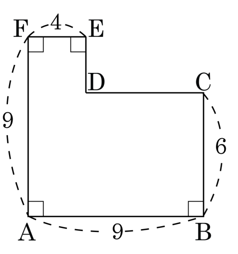
$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{BC}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

$$D = \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 3}{1+2} \right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3} \right)$$

$\therefore\ a + b = 1$

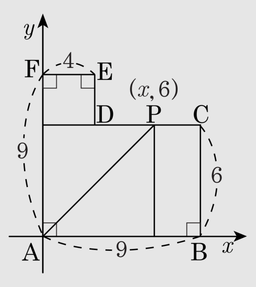
26. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



① $\sqrt{83}$ ② $\sqrt{84}$ ③ $\sqrt{85}$ ④ $\sqrt{86}$ ⑤ $\sqrt{87}$

해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가 x축,
점 A가 원점이 되도록 하고, $\mathrm{P}(x,\ 6)$이라고 하면
$\overline{\mathrm{PC}} = 9 - x$이다.
이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로
사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33$에서 $x = 7$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85}$