1. 두 점 A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P$(2.4, -1)$, Q$(0,\ 6)$ ② P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 6)$
③ P$(3.6,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$ ④ P$(2.4, 0)$, Q$(0,\ 5)$
⑤ P$(3.6, 0)$, Q$(-1,\ 2)$

해설

A$(-1,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 P$(x,\ 0)$과 Q$(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$
양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore$ P$(3.6,\ 0)$
$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$
양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore$ Q$(0,\ 6)$

2. $3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 A$(-3, 2)$이고, P$(1, 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3\overline{\mathrm{PA}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 3$이고,
점 P가 선분 AB 위의 점이므로
점 P는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점이다.
이 때, 점 B의 좌표를 B(a, b)라 하면

$$\left(\frac{2\times a + 3\times(-3)}{2+3},\ \frac{2\times b + 3\times 2}{2+3}\right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a-9}{5} = 1,\ \frac{2b+6}{5} = 0$$

$\therefore\ a = 7, b = -3$

$\therefore\ a + b = 4$

3. A $(4,7)$, B $(3,2)$, C $(5,3)$, D (x,y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right)=\left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$

$\therefore\ x+3=9,\ y+2=10$

$\therefore\ x=6,\ y=8$

4. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A$(4,\ 6)$, B$(-2,\ 2)$이고, 무게중심이 G$(1,\ 3)$일 때 꼭짓점 C의 좌표는?

① $(-1,\ 1)$　② $(1,\ -1)$　③ $(1,\ 1)$
④ $(-1,\ -1)$　⑤ $(1,\ 2)$

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
점 C$(x,\ y)$라 하면,
$\text{G} = \left(\frac{4-2+x}{3},\ \frac{6+2+y}{3}\right) = (1,\ 3)$
$\therefore\ x = 1,\ \ y = 1$

5. 세 점 $O(0,0), A(2,4), B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

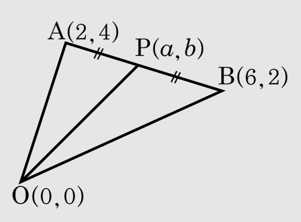
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로

$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

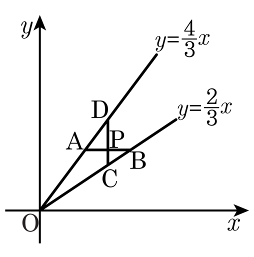


이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$

6. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

7. 좌표평면 위에 세 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ 7)$, C$(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle$ABC의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면 직선이 $\overline{BC}$의 중점 M$(5, 5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

8. 다음 중 직선 $2x-3y-5=0$ 에 수직이고 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3,-2)$ ② $(3,-3)$ ③ $(3,-4)$
④ $(3,-5)$ ⑤ $(3,-6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로
이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-2=-\frac{3}{2}(x+1)$
$\therefore 3x+2y-1=0$
그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3,-4)$ 이다.

9. 점 $\mathrm{A}(-2,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ 를 이은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 $(1,0)$ 에서 직선l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$\mathrm{M}\left(\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}, \frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)=(2,3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{4-1}{4-(-2)}=\dfrac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

$(2,3)$ 을 지나므로 $l : y-3=-2(x-2)$

$\therefore\ 2x+y-7=0$

따라서 $(1,0)$ 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2\cdot1+0-7|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

10. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$으로 나타낼 수 있다.
이 때, $(0,\ 0)$을 지나므로
$(-3)+k(-3)=0 \quad \therefore\ k=-1$
$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$을 정리하면
$\therefore\ x-2y=0$
$a=1,\ b=-2 \quad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

11. 두 직선 $x+y=3$, $mx-y+2m-5=0$이 제 1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $-2<m<2$　② $-2<m<3$　③ $-1<m<2$

④ $1<m<4$　⑤ $0<m<3$

해설

$mx-y+2m-5=0\cdots$①에서
$m(x+2)-(y+5)=0$이므로
위의 직선은 m의 값에 관계없이
점 $(-2,-5)$를 지나고, 기울기 m인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 ①이 $(3,0)$과 $(0,3)$을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 ①이 $(3,0)$을 지날 때 $m=1$이고
$(0,3)$을 지날 때 $m=4$이므로
따라서 $1<m<4$

12. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$y + 1 = \dfrac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$

$\therefore 2x - y - 5 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$\dfrac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

13. 점 $P(1, 2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $4\sqrt{2}$　④ 2　⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)
= (점 $P(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

14. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1,2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax+by+c=0$으로 표현될 때, $a+b+c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1,2)$를 지나는 직선은
$y=m(x-1)+2$ 에서,
$mx-y-m+2=0\cdots$ ㉠
여기서 $(0,0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\dfrac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m-2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m=\dfrac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\dfrac{3}{4}x-y+\dfrac{5}{4}=0,$
$3x-4y+5=0$
$\therefore\ a+b+c=3-4+5=4$

15. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi)\\ &= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots ㉠\end{aligned}$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

16. x에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + 4(a+b-1) = 0$이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, 좌표평면 위의 점 $(-1, 0)$과 점 (a, b) 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

중근을 가질 때 판별식이 0이므로

$(a+b)^2 - 4(a+b-1) = 0$

$(a+b-2)^2 = 0, \quad a+b = 2$

$(-1, 0)$ 과 (a, b) 사이의 거리

$= \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$

$= \sqrt{(a+1)^2 + (2-a)^2}$

$= \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}$

$\therefore$ 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

17. 두 점 $A(4,\ -2)$, $B(3,\ 5)$로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P(-2,\ -1)$　② $P(-1,\ 0)$　③ $P(0,\ 1)$
④ $P(1,\ 2)$　⑤ $P(2,\ 3)$

해설

점 P의 좌표를 $P(0,\ b)$라고 하면

$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$

$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$

$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$

$14b = 14$

$\therefore b = 1$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(0,\ 1)$

18. 두 점 A$(1,1)$, B$(4,3)$에 대하여 점 P가 x축 위의 점 일때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

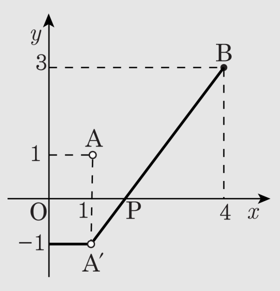
① 5　　② $2\sqrt{2}$　　③ $4\sqrt{2}$　　④ $8\sqrt{2}$　　⑤ 8

해설

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 A $(1,1)$을 x축에 대해 대칭이동시킨 A$'(1,\ -1)$과 B $(4,3)$을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(4-1)^2+(3+1)^2} = \sqrt{25}=5$



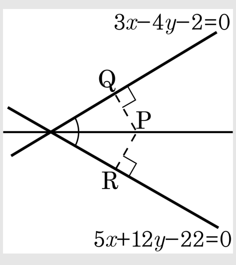
19. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

20. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　　② $(-2,\ -5)$　　③ $(3,\ 5)$

④ $(2,\ 3)$　　⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$에서

$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$\therefore\ 3a - 2b = 5 \cdots$ ①

또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$b = 2a - 1 \cdots$ ②

①, ② 를 연립하여 풀면 $a = -3,\ b = -7$

21. 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 외심을 $\mathrm{O}(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

점 O에서 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에 이르는 거리는 같으므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2$ 에서 $2a+1=-6a+9$

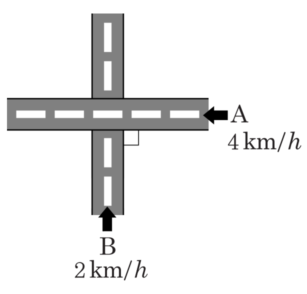
$\therefore\ a=1$

$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2$ 에서 $-2b+5=-4b+13$

$\therefore\ b=4$

그러므로 $a+b=5$

22. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후　④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A$(6,\ 0)$, B$(0, -4)$ 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2-64t+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52}$$
$$= \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$$ 이므로

$t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

23. 두 점 $\mathrm{A}(3,-2)$, $\mathrm{B}(-5,1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4}<t<\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}<t<\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{8}<t<\frac{5}{6}$

해설

$\mathrm{A}(3,-2)$, $\mathrm{B}(-5,1)$ 을 $t:1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t\cdot(-5)+(1-t)\cdot 3}{t+1-t},\frac{t\cdot 1+(1-t)\cdot(-2)}{t+1-t}\right)$$

$=(-5t+3-3t,t-2+2t)=(-8t+3,3t-2)$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$-8t+3<0$, $8t>3$, $t>\frac{3}{8}$

$3t-2<0$, $3t<2$, $t<\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{3}{8}<t<\frac{2}{3}$

24. $\triangle ABC$ 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\ \dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_2+a_3}{2},\ \dfrac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_3+a_1}{2},\ \dfrac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G = \left(\dfrac{-2-6+5}{3},\ \dfrac{7+4-2}{3}\right) = (-1,\ 3)$

$\therefore$ 2

25. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심

④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$, C$(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 D$(x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

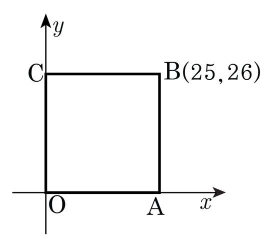
$$\mathrm{P} = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 +(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\} - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} + k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

$x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

즉 $\triangle$ABC 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

26. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25,\ 0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8,\ 4),\ (16,\ 7),\ (24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

27. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

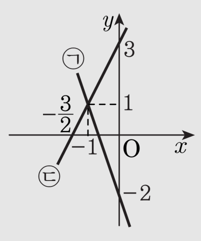
$$3x + y + 2 = 0,\ x + 3y + k = 0,\ 2x - y + 3 = 0$$

① $k \neq -2$　② $k \neq -3$　③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$　⑤ $k \neq -11$

해설

$3x + y + 2 = 0 \cdots$ ㉠
$x + 3y + k = 0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x - y + 3 = 0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

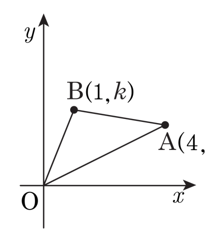
28. 점 (a, b)가 직선 $y=2x-3$ 위를 움직일 때, 직선 $y=ax+2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P(−4, 6) ② P(−4, −6) ③ P(2, 3)
④ P(3, 2) ⑤ P(−2, −4)

해설

점 (a, b)가 직선 $y=2x-3$
위에 있으므로 $b=2a-3$
따라서 $y=ax+2b$에서
$y=ax+2(2a-3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x+4)-(6+y)=0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x+4=0,\ 6+y=0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

29. 다음 그림과 같이 O(0, 0), A(4, 2), B(1, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, 양수 k의 값은?



① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

직선 OA의 방정식은 $x - 2y = 0$이다.
점 B(1, k)에서 직선 $x - 2y = 0$까지의 거리

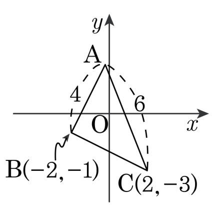
h는 $h = \frac{|1\times1 - 2\times k|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{OA} = 2\sqrt{5}$

$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|1-2k|}{\sqrt{5}} = 4$

$\therefore\ k = \frac{5}{2}\ (\because k > 0)$

30. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $B(-2,\ -1)$, $C(2,\ -3)$이고 점 A에서 $\overline{BC}$에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$의 넓이를 이등분하는 점을 D라 하자. 선분 AD의 길이는?

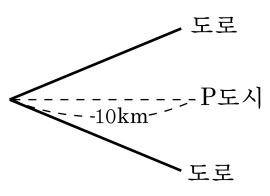


① 4　② $\sqrt{17}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D가 $\overline{BC}$의 중점일 때
$\triangle ABD = \triangle ACD$가 되어 넓이를 이등분한다.
이 때, 점 D의 좌표는 $D\left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{-1-3}{2}\right)$
$\therefore\ D(0,\ -2)$
또, $\overline{BD} = \sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{5}$이고
점 D가 $\overline{BC}$의 중점이므로
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$이 성립한다.
즉, $4^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + 5)$
$\overline{AD}^2 + 5 = 26$, $\overline{AD}^2 = 21$
$\therefore\ \overline{AD} = \sqrt{21}$

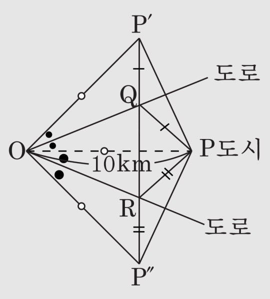
31. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$의 각 도로 교차 하고 있다. 두 도로의 교차점에서 $10\,\text{km}$ 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}\,\text{km}$　② $12\sqrt{2}\,\text{km}$　③ $14\sqrt{2}\,\text{km}$
④ $16\sqrt{2}\,\text{km}$　⑤ $18\sqrt{2}\,\text{km}$

해설

두 도로에 대한 점 P 의 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP''}}\geq\overline{\mathrm{P'P''}}$
두 길의 교점을 O 라 하면
$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{P'O}}=\overline{\mathrm{P''O}}=10$ 이고
두 도로가 이루는 각이 $45°$ 이므로
$\angle\mathrm{P'OP''}=90°$
따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{\mathrm{P'P''}}=10\sqrt{2}\,\text{km}$ 이다.



32. 세 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{C}(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\angle\mathrm{C}$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $\mathrm{D}(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$ 에서
$\overline{\mathrm{AD}} : \mathrm{BD} = \overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 1$ 이다.
따라서 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{D}(a,b) = \left(\frac{2\times3+1\times2}{2+1},\ \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = \left(\frac{8}{3},\ 1\right)$$

$\therefore\ 3ab = 8$

33. 실계수 이차 방정식 $ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 이 중근을 가질 때 점 $\mathrm{P}(a^2+b^2,\ a^2b^2)$ 의 자취의 방정식을 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x^2 (x > 0)$
② $y = \frac{1}{3}x^2 (x > 0)$
③ $y = \frac{1}{4}x^2 (x > 0)$
④ $y = \frac{1}{5}x^2 (x > 0)$
⑤ $y = \frac{1}{6}x^2 (x > 0)$

해설

$ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 이 중근을 가지므로
$D = (a+b)^2 - 4ab = 0$, $a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 0$
$a^2 - 2ab + b^2 = 0$, $(a-b)^2 = 0$
$\therefore\ a = b$
점 $P(a^2+b^2,\ a^2b^2)$ 에서 $a^2 + b^2 = x,\ a^2b^2 = y$ 로 놓으면
$x^2 = (a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = 4a^2b^2$
$\therefore\ x^2 = 4y$
즉 $y = \frac{1}{4}x^2$
그런데 $a \neq 0$ 이므로 $x = a^2 + b^2 > 0$
$\therefore\ y = \frac{1}{4}x^2\ (x > 0)$

34. 방정식 $15x^2-6xy-10x+4y=0$ 은 두 직선을 나타낸다. 이 두 직선의 교점을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 것은?

① $3x-2=0$　　② $x+3=0$

③ $5x-2y=0$　　④ $4x-3y+6=0$

⑤ $6x+15y-29=0$

해설

준 식을 인수분해하면,$(3x-2)(5x-2y)=0$ $3x-2=0,\ 5x-2y=0$

이므로 이 두 직선의 교점은 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 이다.

이 두 직선의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는

교점 $A\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

($\overline{OA}$ 의 기울기)$=\frac{5}{2}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-\frac{5}{3}=-\frac{2}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore\ \ 6x+15y-29=0$