

1. 두 점 $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 와 y 축 위의 점 Q 의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0, 6)$

② $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 6)$

③ $P(3.6, 0)$, $Q(0, 6)$

④ $P(2.4, 0)$, $Q(0, 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1, 2)$

해설

$A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 $P(x, 0)$ 과 $Q(0, y)$ 를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2 + 2^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2 + (y-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

2. $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 A(-3, 2)이고, P(1, 0)일 때, 점 B의 x 좌표와 y 좌표의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$3\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$ 이고,

점 P가 선분 AB 위의 점이므로

점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

이 때, 점 B의 좌표를 B(a, b)라 하면

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times (-3)}{2 + 3}, \frac{2 \times b + 3 \times 2}{2 + 3} \right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a - 9}{5} = 1, \frac{2b + 6}{5} = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -3$$

$$\therefore a + b = 4$$

3. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y) 에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2} \right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2} \right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

4. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 $A(4, 6)$, $B(-2, 2)$ 이고, 무게중심이 $G(1, 3)$ 일 때 꼭짓점 C 의 좌표는?

① $(-1, 1)$

② $(1, -1)$

③ $(1, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(1, 2)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

점 $C(x, y)$ 라 하면,

$$G = \left(\frac{4 - 2 + x}{3}, \frac{6 + 2 + y}{3} \right) = (1, 3)$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

5. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
넓이가 같으므로

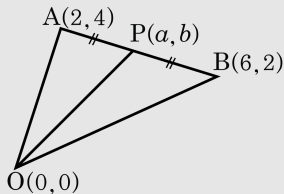
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이라면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

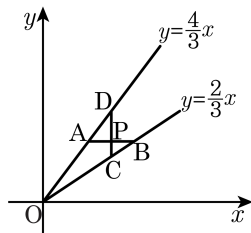
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



6. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 $y = \frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$
 ② $\frac{8}{9}$
 ③ $\frac{9}{8}$
 ④ $\frac{9}{2}$
 ⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

$$\text{직선 } y = \frac{4}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{직선 } y = \frac{2}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

7. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$ 에 의하여 $\triangle ABC$ 의 넓이가 이등분될 때, m 의 값은?

① $\frac{2}{7}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x + 2) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 점 A 를 지난다.

따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$ 를 지나야 한다.

$$\therefore 5 = m(5 + 2) + 1$$

$$\therefore m = \frac{4}{7}$$

8. 다음 중 직선 $2x - 3y - 5 = 0$ 에 수직이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 있는 점은?

① $(3, -2)$

② $(3, -3)$

③ $(3, -4)$

④ $(3, -5)$

⑤ $(3, -6)$

해설

주어진 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 1)$$

$$\therefore 3x + 2y - 1 = 0$$

그러므로 이 직선 위에 있는 점은 점 $(3, -4)$ 이다.

9. 점 A(-2, 1), B(4, 4) 를 이은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점을 지나 AB 에 수직인 직선의 방정식을 l 이라고 할 때, 점 (1, 0) 에서 직선 l 에 이르는 거리는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ 2

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

선분 AB 의 내분점의 좌표

$$M\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2 + 1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}\right) = (2, 3)$$

직선 AB 의 기울기는 $\frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{1}{2}$

그러므로 직선 l 은 기울기가 -2 이고

(2, 3) 을 지나므로 $l : y - 3 = -2(x - 2)$

$$\therefore 2x + y - 7 = 0$$

따라서 (1, 0) 으로부터 직선 l 까지의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 1 + 0 - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

10. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax + by = 0$ 이라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(2x - y - 3) + k(x + y - 3) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(-3) + k(-3) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$(2x - y - 3) + (-1)(x + y - 3) = 0$ 을 정리하면

$$\therefore x - 2y = 0$$

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

11. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

① $-2 < m < 2$

② $-2 < m < 3$

③ $-1 < m < 2$

④ $1 < m < 4$

⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서

$m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로

위의 직선은 m 의 값에 관계없이

점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.

따라서 두 직선이 제 1사분면에서

만나기 위해서는 직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.

직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고

$(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로

따라서 $1 < m < 4$

12. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$$\therefore 2x - y - 5 = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

13. 점 $P(1, 2)$ 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $4\sqrt{2}$

④ 2

⑤ 3

해설

($\overline{PH}$ 의 길이)

= (점 $P(1, 2)$ 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

$$\therefore \overline{PH} = \frac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

14. 원점에서 거리 1 이고, 점 (1, 2) 를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

점 (1, 2) 를 지나는 직선은

$$y = m(x - 1) + 2 \text{ 에서,}$$

$$mx - y - m + 2 = 0 \cdots \textcircled{7}$$

여기서 (0, 0) 에 이르는 거리가 1 이므로

$$\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, |m - 2| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면, } m = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{7} \text{ 에 대입하여 정리하면, } \frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$

$$\therefore a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$$

15. 복소수 $z = a + bi$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2 - 3i)z &= (2 - 3i)(a + bi) \\ &= (2a + 3b) + (2b - 3a)i \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

⑦ 이 실수이려면 $2b = 3a$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

16. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(a+b)x + 4(a+b-1) = 0$ 이 중근을 가지도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, 좌표평면 위의 점 $(-1, 0)$ 과 점 (a, b) 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

중근을 가질 때 판별식이 0이므로

$$(a+b)^2 - 4(a+b-1) = 0$$

$$(a+b-2)^2 = 0, \quad a+b = 2$$

$(-1, 0)$ 과 (a, b) 사이의 거리

$$= \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{(a+1)^2 + (2-a)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}$$

$$\therefore \text{최솟값은 } a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

17. 두 점 A(4, -2), B(3, 5)로부터 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P(-2, -1)$

② $P(-1, 0)$

③ $P(0, 1)$

④ $P(1, 2)$

⑤ $P(2, 3)$

해설

점 P의 좌표를 $P(0, b)$ 라고 하면

$$\overline{PA} = \sqrt{(0-4)^2 + (b+2)^2} = \sqrt{b^2 + 4b + 20}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-5)^2} = \sqrt{b^2 - 10b + 34}$$

이 때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$b^2 + 4b + 20 = b^2 - 10b + 34$$

$$14b = 14$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $P(0, 1)$

18. 두 점 $A(1,1)$, $B(4,3)$ 에 대하여 점 P 가 x 축 위의 점 일때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은?

① 5

② $2\sqrt{2}$

③ $4\sqrt{2}$

④ $8\sqrt{2}$

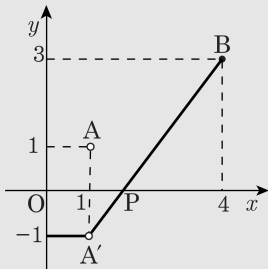
⑤ 8

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $A(1,1)$ 을 x 축에 대해 대칭이동시킨 $A'(1, -1)$ 과 $B(4,3)$ 을 잇는 선분의 길이와 같다.

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'B}$ 이므로

$$\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$



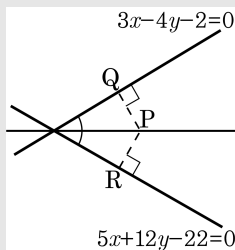
19. 두 직선 $3x - 4y - 2 = 0$, $5x + 12y - 22 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X - 4Y - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5X + 12Y - 22|}{\sqrt{25 + 144}}$$

$$13(3X - 4Y - 2) = \pm 5(5X + 12Y - 22)$$

즉, $13(3X - 4Y - 2) = 5(5X + 12Y - 22)$ 또는

$13(3X - 4Y - 2) = -5(5X + 12Y - 22)$ 정리하면

$x - 8y + 6 = 0$ 또는 $8x + y - 17 = 0$ 에서

기울기가 양이므로

$$\therefore x - 8y + 6 = 0$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

20. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

- ① (-3, -7) ② (-2, -5) ③ (3, 5)
④ (2, 3) ⑤ (2, 5)

해설

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

21. 세 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(4, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심을 $O(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

점 O 에서 세 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(4, 2)$ 에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \text{에서 } 2a + 1 = -6a + 9$$

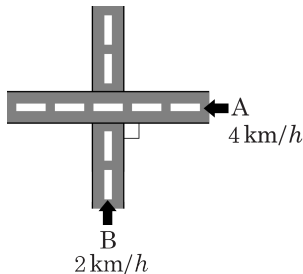
$$\therefore a = 1$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 \text{에서 } -2b + 5 = -4b + 13$$

$$\therefore b = 4$$

그러므로 $a + b = 5$

22. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, -4) 이고
 t 시간 후의 A, B 의 좌표는

A(6 - 4t, 0), B(0, -4 + 2t) 이다.

따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2} \\ &= \sqrt{20t^2 - 64t + 52} \\ &= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} \\ &= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

23. 두 점 $A(3, -2)$, $B(-5, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{8} < t < \frac{5}{6}$

③ $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$

해설

$A(3, -2)$, $B(-5, 1)$ 을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t \cdot (-5) + (1-t) \cdot 3}{t+1-t}, \frac{t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-2)}{t+1-t} \right)$$

$$= (-5t + 3 - 3t, t - 2 + 2t) = (-8t + 3, 3t - 2)$$

이 점이 제3 사분면에 있으므로

$$-8t + 3 < 0, 8t > 3, t > \frac{3}{8}$$

$$3t - 2 < 0, 3t < 2, t < \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$$

24. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2} \right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2} \right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2} \right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3} \right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

25. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심

② 내심

③ 수심

④ 무게중심

⑤ 방심

해설

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

송전소의 위치를 $D(x, y)$, 비용을 P 라고 하면

$$P = k\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2\right.$$

$$\left. + 3\left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2\right\}$$

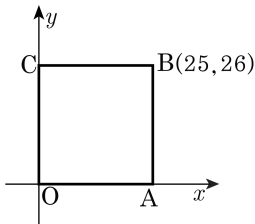
$$- \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3}$$

$+ k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ 에서

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ 일 때}$$

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

26. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
 직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8, 4)$, $(16, 7)$, $(24, 10)$ 으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

27. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

$$3x + y + 2 = 0, \quad x + 3y + k = 0, \quad 2x - y + 3 = 0$$

① $k \neq -2$

② $k \neq -3$

③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$

⑤ $k \neq -11$

해설

$$3x + y + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + 3y + k = 0 \cdots \textcircled{㉡} \text{ 일 때,}$$

$$2x - y + 3 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

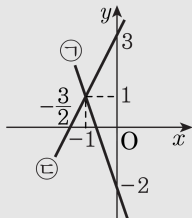
다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0, \quad \therefore k \neq -2$



28. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

29. 다음 그림과 같이 $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(1,k)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?

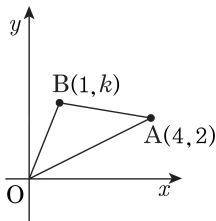
① 2

② $\frac{5}{2}$

③ 3

④ $\frac{7}{2}$

⑤ 4



해설

직선 OA 의 방정식은 $x - 2y = 0$ 이다.

점 $B(1,k)$ 에서 직선 $x - 2y = 0$ 까지의 거리

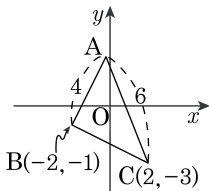
$$h \text{ 는 } h = \frac{|1 \times 1 - 2 \times k|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overline{OA} = 2\sqrt{5}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|1 - 2k|}{\sqrt{5}} = 4$$

$$\therefore k = \frac{5}{2} (\because k > 0)$$

30. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $B(-2, -1)$, $C(2, -3)$ 이고 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 점을 D라 하자. 선분 AD의 길이는?



- ① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점일 때

$\triangle ABD = \triangle ACD$ 가 되어 넓이를 이등분한다.

이 때, 점 D의 좌표는 $D\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$

$\therefore D(0, -2)$

또, $\overline{BD} = \sqrt{(0+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$ 이고

점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

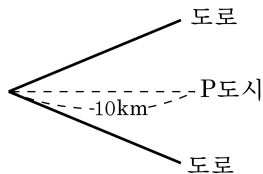
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$ 이 성립한다.

즉, $4^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + 5)$

$\overline{AD}^2 + 5 = 26$, $\overline{AD}^2 = 21$

$\therefore \overline{AD} = \sqrt{21}$

31. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km

② $12\sqrt{2}$ km

③ $14\sqrt{2}$ km

④ $16\sqrt{2}$ km

⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} =$

$$\overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''} \geq \overline{P'P''}$$

두 길의 교점을 O 라 하면

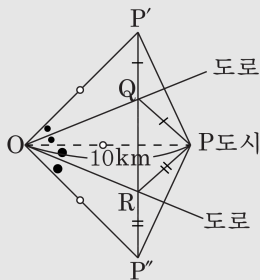
$$\overline{PO} = \overline{P'O} = \overline{P''O} = 10 \text{ 이고}$$

두 도로가 이루는 각이 45° 이므로

$$\angle P'OP'' = 90^\circ$$

따라서 피타고라스 정리에 의하여 새

로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$ km 이다.



32. 세 점 $A(2,3)$, $B(3,0)$, $C(4,1)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle C$ 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 $D(a,b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 15

해설

삼각형의 각의 이등분선 정리에 의해

$$\overline{AC} = 2\sqrt{2}, \overline{BC} = \sqrt{2} \text{ 에서}$$

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1 \text{ 이다.}$$

따라서 점 D 는 $\overline{AB}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이므로

$$D(a,b) = \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2 + 1} \right) = \left(\frac{8}{3}, 1 \right)$$

$$\therefore 3ab = 8$$

33. 실계수 이차 방정식 $ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 이 중근을 가질 때 점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 의 자취의 방정식을 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x^2 (x > 0)$

② $y = \frac{1}{3}x^2 (x > 0)$

③ $y = \frac{1}{4}x^2 (x > 0)$

④ $y = \frac{1}{5}x^2 (x > 0)$

⑤ $y = \frac{1}{6}x^2 (x > 0)$

해설

$ax^2 + (a+b)x + b = 0$ 이 중근을 가지므로

$$D = (a+b)^2 - 4ab = 0, \quad a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0, \quad (a-b)^2 = 0$$

$$\therefore a = b$$

점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 에서 $a^2 + b^2 = x, a^2b^2 = y$ 로 놓으면

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 4a^2b^2$$

$$\therefore x^2 = 4y$$

$$\text{즉 } y = \frac{1}{4}x^2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $x = a^2 + b^2 > 0$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 \quad (x > 0)$$

34. 방정식 $15x^2 - 6xy - 10x + 4y = 0$ 은 두 직선을 나타낸다. 이 두 직선의 교점을 지나는 직선 중에서 원점으로부터의 거리가 최대인 것은?

① $3x - 2 = 0$

② $x + 3 = 0$

③ $5x - 2y = 0$

④ $4x - 3y + 6 = 0$

⑤ $6x + 15y - 29 = 0$

해설

준 식을 인수분해하면, $(3x-2)(5x-2y) = 0$ $3x-2 = 0$, $5x-2y = 0$

이므로 이 두 직선의 교점은 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 이다.

이 두 직선의 교점을 지나는 직선과 원점 사이의 거리가 최대일 때는

교점 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 가 원점에서 직선에 내린 수선의 발일 때이므로

$$(\overline{OA} \text{의 기울기}) = \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{5}{3} = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore 6x + 15y - 29 = 0$$