1. 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$　② $\sqrt{2}i$　③ -2

④ -1　⑤ 1

해설

(준식)$= (x-1)(x+1)(x^2+2x+3) = 0$

실근의 합은 $1 + (-1) = 0$

허근의 합은 -2

모든 근의 합은 -2

2. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \cdots ㉠ \\ x - y = 1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y)=0$

$\Rightarrow \quad x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad y=\pm 2$

ii) $x=2y$

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$x+y=(4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$

5. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 a의 값과 그 때의 중근 α의 값의 합 $a+\alpha$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다 $f(-1)=0$이므로

-1	1	$a+1$	$2a$	a
		-1	$-a$	$-a$
	1	a	a	0

$\Rightarrow (x+1)(x^2+ax+a)=0$

$x^2+ax+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 0이 아니므로

x^2+ax+a가 중근을 갖는다.

중근일 조건 : 판별식$=0$

$\therefore\ a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \Rightarrow a=0$ 또는 $a=4$

$\therefore$ 양수 $a=4 \Rightarrow x^2+4x+4=0(x+2)^2=0$

$\Rightarrow$중근 $\alpha=-2 \Rightarrow a+\alpha=2$

6. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$

$\therefore\ \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$

7. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

8. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

9. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서
$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$
$x^4-2x^2-3=0$
$x^2=t$로 치환하면
$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

10. 삼차방정식 $x^3+x^2-(k+2)x+k=0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ -1, 3　④ 0, 3　⑤ 3

해설

$x^3+x^2-(k+2)x+k=0$, $(x-1)(x^2+2x-k)=0$이 중근을 가지려면

ⅰ) $x=1$이 중근일 때,

$1+2-k=0$

$\therefore\ k=3$

ⅱ) $x^2+2x-k=0$이 중근이면

$\frac{D}{4}=1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

11. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$의 한 근이 1일 때, 허근은?

① $\pm i$　② $\pm 2i$　③ $\pm 3i$　④ $\pm 4i$　⑤ $\pm 5i$

해설

한 근이 1이므로 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$에 대입하면
$1 + 3 + a = 0, \quad \therefore a = -4$
방정식 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$에서 $x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 4 = 0$, $(t+4)(t-1) = 0$, $(x^2+4)(x^2-1) = 0$
$\therefore x = \pm 2i$ 또는 $x = \pm 1$
따라서, 주어진 방정식의 허근은 $\pm 2i$이다.

12. x에 관한 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 3,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2,\ \alpha\beta\gamma = -4$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$
$= 1 - 3 + 2 + 4 = 4$

13. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma+\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$이므로 주어진 식은 $\dfrac{-\alpha}{\alpha} + \dfrac{-\beta}{\beta} + \dfrac{-\gamma}{\gamma} = -3$이 된다.

14. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$ 에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$ 에서

$$-a=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$
$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{-2}{1}=-2$$

$\therefore\ a=2$

$$b=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}$$
$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

15. 방정식 $x^3+x^2+px+q=0$ 에 대하여 한 근이 $1-i$ 일 때, $p+q$ 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

한 근이 $1-i$ 이므로
켤레복소수인 $1+i$ 도 근이 된다. 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해
$-1=(1-i)+(1+i)+\alpha \therefore \alpha=-3$
$p=(1-i)(1+i)-3(1-i)-3(1+i)$
$\therefore p=-4$
$-q=(1-i)(1+i)\cdot(-3)=-6$
$\therefore q=6$
$\therefore\ p+q=-4+6=2$

16. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω일 때

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ 에서

$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이 성립한다.

주어진 문제식을 ω^{50} 으로 묶으면

$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$ 이고

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 이므로 답은 0 이다.

17. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 할 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$의 값은?

① $-1 \pm \sqrt{3}i$　② $1 \pm \sqrt{3}i$　③ $3 \pm \sqrt{3}i$

④ $6 \pm \sqrt{3}i$　⑤ $9 \pm \sqrt{3}i$

해설

$\alpha^3 = 8$에서 $(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4) = 0$,
α는 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$의 근이다.
$\therefore \alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$
이 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
$= 1 + \alpha + (-2\alpha - 4) + 8$
$= 5 - \alpha$
$= 5 - (-1 \pm \sqrt{3}i)$
$= 6 \mp \sqrt{3}i$

18. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 근 x, y가 $xy=a$, $x+y=b$를 만족할 때, $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\begin{cases} 2x-y-5=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠식을 정리해서

$y=2x-5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$x^2+(2x-5)^2=25,$

$5x^2-20x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0,\ 4$

ⅰ) $x=0$일 때, $y=-5$

$\therefore a=0,\ b=-5$

$\therefore a-b=5$

ⅱ) $x=4$일 때, $y=3$

$\therefore a=12,\ b=7$

$\therefore a-b=5$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y=x-3$을 이차식에 대입하면
$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$
$x^2-3x+2=0$
$\therefore\ x=1, 2$
(i) $x=1$일 때 $y=-2$
(ii) $x=2$일 때 $y=-1$
따라서 $xy=-2$

20. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

i) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ii) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.
㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$
㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+3x+2=0$
$(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=-1,\ -2$
$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

22. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㉠ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㉢ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉠, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

23. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍$(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개

④ 8개　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

24. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로
$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$㉠
$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$㉡
㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$
$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$
$\therefore\ m=1$
$\therefore\ m+\alpha=2$

25. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0,\ x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$㉠

$t^2+at+1=0\cdots$㉡

㉠$-$㉡$\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

26. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의 실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

27. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -3

▷ 정답: 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$

28. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

29. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개
④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$
$=(x-2)(y+1)$ 이므로
$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는
i) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$
ii) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$
iii) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$
iv) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,
$x=-1,\ y=-2$
$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

30. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면
$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$
$(x-3)(y+2)=4$
$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는
$x-3=1,\ y+2=4$
$\therefore\ x=4,\ y=2$

31. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z 라 하자
$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡
㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow \quad y = 40 - 2x$
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow \quad z = x - 10$
$\therefore \quad x = 10$ 이면 $z = 0$
$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
$\therefore \quad x \geq 11$, 최소 11 문항

32. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0 \therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ ……㉠

$\{9-3b+a=0\}$……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

33. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\frac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\frac{1}{\alpha}=3$

34. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 + t = 0$, $t(t+1) = 0$

$\therefore\ t = 0$ 또는 $t = -1$

(ⅰ) $x + \frac{1}{x} = 0$일 때, $x^2 + 1 = 0$

$\therefore x = \pm i$

(ⅱ) $x + \frac{1}{x} = -1$일 때,

$x^2 + 1 = -x$, $x^2 + x + 1 = 0$

$$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore\ (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

35. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3,b=2,c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
∴구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

36. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $x^5+y^5=1$ ② $x^7+y^7=1$ ③ $x^9+y^9=1$

④ $x^{11}+y^{11}=1$ ⑤ $x^{13}+y^{13}=1$

해설

$x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2-x+1=0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2-x+1=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$

$\therefore\ x^3=y^3=-1,\ x+y=1,\ xy=1$

① : $x^5+y^5 = x^3\times x^2+y^3\times y^2 = -(x^2+y^2) =$

$-\{(x+y)^2-2xy\}=1$

② : $x^7+y^7=(x^3)^2x+(y^3)^2y=x+y=1$

③ : $x^9+y^9=(x^3)^3+(y^3)^3=-2$

④ : $x^{11}+y^{11}=(x^3)x^2+(y^3)^3y^2=-(x^2+y^2)=1$

⑤ : $x^{13}+y^{13}=(x^3)^4x+(y^3)^4y=x+y=1$

37. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3=1$
㉡ $\omega^2+\omega+1=0$
㉢ $\overline{\omega}=\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$
㉣ $\omega+\overline{\omega}=1$
㉤ $\omega\overline{\omega}=1$
㉥ $\omega^{2005}+\dfrac{1}{\omega^{2005}}=-1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^3=1 \Rightarrow \omega^3=1 \cdots$㉠(○)
$x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\Rightarrow \omega^2+\omega+1=0 \cdots$ ㉡(○)
∴근과 계수와의 관계에 의해
$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1 \cdots$㉣(×), ㉤(○)
$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로
$\omega^2+\omega+1=\omega^2-1-\overline{\omega}+1=0$
$\Rightarrow \omega^2=\overline{\omega} \cdots$㉢(○)
$\omega^{2005}+\dfrac{1}{\omega^{2005}}$
$=(\omega^3)^{668}\omega+\dfrac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$
$=\omega+\dfrac{1}{\omega}=-1$
$(\because \omega^2+\omega+1=0) \cdots$㉥(○)

38. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1, 1, \frac{7}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$ ③ $-1, 1$
④ $-\frac{7}{2}, 1$ ⑤ $1, \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8에서 $x^2-11xy-26y^2=0$, $(x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots ㉢$
$x-13y=0 \cdots\cdots ㉣$
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm1,\ x=\mp2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

39. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$
따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4 개이다

40. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b)의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는

$a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

41. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots ㉠$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$

$-y^2 + 6y - 9 \geq 0,\ y^2 - 6y + 9 \leq 0$

$(y-3)^2 \leq 0$ y 가 실수이므로 $y - 3 = 0$

$\therefore y = 3 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0,\ (x+1)^2 = 0$

$\therefore\ x = -1$

$\therefore\ x + y = -1 + 3 = 2$

42. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

43. 방정식 $x^{11}=1$의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$의 값은?

① 1 ② -1 ③ i ④ $-i$ ⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$의 10개의 근이다.

$\therefore x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x=-1$을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$