1. 부등식 $|x+1|+|x-1| \geq 4$의 해는 $x \leq a$ 또는 $x \geq b$이다. $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(i) $x < -1$

$-(x+1)-(x-1) \geq 4,\ x \leq -2$

(ii) $-1 \leq x < 1$

$x+1-(x-1) \geq 4$

$2 \geq 4$ (성립 안함)

(iii) $x \geq 1$

$x+1+x-1 \geq 4$

$x \geq 2$

(i), (iii)을 합하면 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$\therefore\ a+b=0$

2. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$ ② $x^2-4x+3<0$

③ $x^2-6x+5<0$ ④ $x^2-4x+3\leqq 0$

⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(i) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$

$x>-1 \quad \therefore -1<x<1$

(ii) $1\leq x<3$일 때, $x-1-x+3<6$

$2<6 \quad \therefore 1\leq x<3$

(iii) $x\geq 3$일 때, $x-1+x-3<6$

$x<5 \quad \therefore 3\leq x<5$

$\therefore -1<x<5$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

3. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

4. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$

$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로

만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일

$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$

$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \ge 1$

$\therefore$ 모든 실수

$\therefore x = 1$

5. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40 \ , \ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$, $x^2 - 3x - 40 < 0$,

$(x - 8)(x + 5) < 0$, $-5 < x < 8$

$3x^2 - 7x \geq 40$, $3x^2 - 7x - 40 \geq 0$

$(3x + 8)(x - 5) \geq 0$,

$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\dfrac{8}{3}$ $\rightarrow$

공통범위는 $-5 < x \leq -\dfrac{8}{3}$, $5 \leq x < 8$

정수는 -4, -3, 5, 6, 7 : 5개이다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

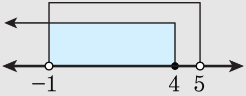
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases}$ 의 값은?

① $x>-1$ ② $-4<x<-1$ ③ $0<x<4$

④ $1<x<4$ ⑤ $-4<x<3$

해설

$$x^2+3x-4<0 \Rightarrow (x-1)(x+4)<0$$
$$\Rightarrow -4<x<1$$

$$x^2-2x-3>0 \Rightarrow (x+1)(x-3)>0$$
$$\Rightarrow x<-1 \text{ 또는 } x>3$$

$\therefore$ 공통부분을 구하면 $-4<x<-1$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \quad \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

9. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ **정답 :** $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x+2)(x-2) < 0$

$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$

$(x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡

따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를

동시에 만족하는 x의 값이므로

$\therefore -1 < x < 2$

10. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1 < x+1 < x^2-3x+1 \\ x+3 > -x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $2a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{\text{(가)}} < x^2-3x+1 \quad \underbrace{x+1 < x^2-3x+1}_{\text{(나)}} \\ x+3 > -x+2 \cdots \text{(다)} \end{cases}$$

(가)에서 $x^2-x-2<0$, $(x-2)(x+1)<0$

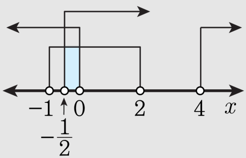
$\therefore -1 < x < 2$

(나)에서 $x^2-4x>0$, $x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x > -\dfrac{1}{2}$



$-\dfrac{1}{2} < x < 0$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=0$ 이므로 $2a+b=-1+0=-1$

11. $\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \leq \beta$일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 3x \leq 0$에서

$x(x-3) \leq 0$이므로

$0 \leq x \leq 3 \cdots$ ㈎

$x^2 - 5x + 4 < 0$에서

$(x-1)(x-4) < 0$이므로

$1 < x < 4 \cdots$ ㈏

㈎, ㈏에 의해

$1 < x \leq 3$이므로

$\alpha = 1, \beta = 3$

$\therefore \alpha + \beta = 4$

12. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ (x-a)(x+2) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0　② -2　③ -4　④ -6　⑤ -8

해설

$x^2 + 3x - 4 < 0$의 해가
$-4 < x < 1$이므로
연립부등식의 해가 $-2 < x < 1$가 되려면
$(x-a)(x+2) > 0$의 해는
$x < a, x > -2$이고, $a \leq -4$이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$　　② $-2 \le x \le 2$　　③ $-1 \le x \le 2$

④ $0 \le x \le 2$　　⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2+x-6 \le 0$ 에서

$(x+3)(x-2) \le 0$

$-3 \le x \le 2 \cdots$ ㈎

$|x-1| \le 3$ 에서

$-3 \le x-1 \le 3$

$-2 \le x \le 4 \cdots$ ㈏

㈎, ㈏ 에서 $-2 \le x \le 2$

14. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

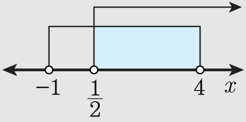
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4$ $\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

15. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

16. 좌표 평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여 부등식
$2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠이
항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0 \cdots$ ㉡식이
항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\therefore\ 2-\sqrt{5} < k < 2+\sqrt{5}$$

이때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

17. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \le 3x \\ x^2 + x \ge 2 \end{cases}$$ 의 해가 부등식

$ax^2 + 2bx - 6 \ge 0$ 의 해와 같을 때, ab 의 값을 구하면?

① 8 ② 4 ③ 2 ④ -4 ⑤ -8

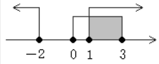
해설

$x^2 - 3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$0 \le x \le 3$

$x^2 + x - 2 \ge 0$, $(x+2)(x-1) \ge 0$

$x \le -2, x \ge 1$



$(x-1)(x-3) \le 0$, $x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\rightarrow -2x^2 + 8x - 6 \ge 0$

$a = -2, b = 4$

$\therefore ab = -8$

18. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \le 0 \\ x^2 + 4x \ge 0 \end{cases}$$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

① 5개 ② 4개 ③ 3개 ④ 2개 ⑤ 1개

해설

$2x^2 - 5x - 3 \le 0$

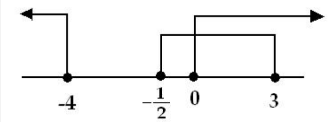
$(x-3)(2x+1) \le 0$

$\rightarrow -\dfrac{1}{2} \le x \le 3$

$x^2 + 4x \ge 0$

$x(x+4) \ge 0$

$x \le -4$ 또는 $x \ge 0$



해 : $0 \le x \le 3$ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \Leftarrow$ 정수해

19. $\begin{cases} (x-4)(x-2) \geq 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 해의 범위가

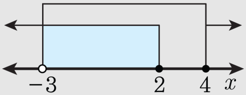
$a < x \leq b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$(x-4)(x-2) \geq 0,\ x \leq 2, x \geq 4$

$(x+3)(x-4) < 0,\ -3 < x < 4$



$\therefore -3 < x \leq 2$

$a = -3,\ b = 2$

$\therefore a + b = -1$

20. x 에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} |x+4| > 3x \\ 2x(x-3) \geq 0 \end{cases}$$ 을 풀면?

① $x \leq 0$　② $-2 < x < 3$　③ $x < 0, x > 2$
④ $0 < x < 2$　⑤ $x \geq 3$

해설

$$\begin{cases} |x+4| > 3x & \cdots ㉠ \\ 2x(x-3) \geq 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠식에서

ⅰ) $x \geq -4$ 일때

$x+4 > 3x \rightarrow 2x < 4 \rightarrow x < 2$

$\Rightarrow -4 \leq x < 2$

ⅱ) $x < -4$ 일때

$-x-4 > 3x \rightarrow 4x < -4 \rightarrow x < -1$

$\therefore x < -4$

ⅰ), ⅱ)에서 $x < 2$

㉡식에서 $2x(x-3) \geq 0 \rightarrow x \geq 3$, $x \leq 0$

㉠과㉡ 공통범위 : $x \leq 0$

21. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \le 0 \\ 2x^2 - 5x < 3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 4 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2 - 5x < 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-3) < 0$

$\therefore -\dfrac{1}{2} < x < 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\dfrac{1}{2} < x < 3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3개다.

22. x에 관한 방정식 $x^2-2kx+(k^2-k)=0$이 실근 α,β를 갖고 $(\alpha-\beta)^2 \le 16$이 성립하기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $-1 \le k \le 4$ ② $-1 \le k \le 5$ ③ $0 \le k \le 4$

④ $0 \le k \le 5$ ⑤ $-2 \le k \le 2$

해설

i) 실근을 가지므로

$D \ge 0$에서 $k \ge 0 \cdots$ ①

ii) $(\alpha-\beta)^2 \le 16$에서

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \le 16$

$(2k)^2-4(k^2-k) \le 16$

$\therefore\ k \le 4 \cdots\cdots$ ②

$\therefore$ ①, ②에서 $0 \le k \le 4$

23. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$ ② $k \ge 1$ ③ $k < -1$

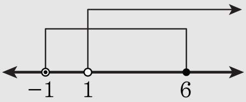
④ $k > -1$ ⑤ $k \ge -1$

해설

$x^2 - 5x - 6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$



연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$의 해는 $x > 1$, $x < -k$이어야 하고

다음 그림에서 k의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

24. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

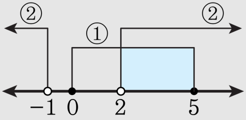
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a 의 값은 2 이다.



25. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24 \geq 0$, $(x+1)(x-a^2+a) \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3 < a < 12$　　② $-3 < a < 8$　　③ $-3 < a < 4$

④ $-2 < a < 12$　　⑤ $-2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24 \geq 0 \cdots \text{(가)} \\ (x+1)(x-a^2+a) \leq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2) \geq 0 \\ \therefore x \leq -2 \text{또는} x \geq 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$-2 < a^2-a < 12$
(다)　(라)

(다)에서

$$a^2-a+2>0, \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

$\therefore$모든 실수
(라)에서

$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$

$\therefore -3 < a < 4$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$-3 < a < 4$

26. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24\ge 0$, $(x+1)(x-a^2+a)\le 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3<a<12$　② $-3<a<8$　③ $-3<a<4$
④ $-2<a<12$　⑤ $-2<a<3$

해설

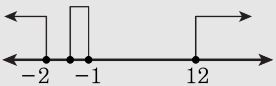
$$\begin{cases} x^2-10x-24\ge 0 & \cdots (가) \\ (x+1)(x-a^2+a)\le & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서

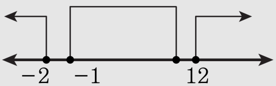
$(x-12)(x+2)\ge 0$

$\therefore x\le -2$ 또는 $x\ge 12$ (가)와 (나)의

공통 범위가 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$a^2-a>-2\cdots$(다)



$a^2-a<12\cdots$(라)

(다)에서$a^2-a+2>0$, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

$\therefore$모든 실수

(라)에서 $a^2-a-12<0$, $(a+3)\times(a-4)<0$

$\therefore -3<a<4$

따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면

$-3<a<4$

27. 두 부등식 $|x-1|<2$, $x^2-2ax+a^2-4 \geq 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $-1<x \leq 2$가 되도록 상수 a의 값을 정하면?

① 0　　② -2　　③ 4　　④ -6　　⑤ 8

해설

$|x-1|<2$의 해는 $-1<x<3$이므로
공통범위가 $-1<x \leq 2$가 되려면 $x=2$가
$x^2-2ax+a^2-4=0$의 근이어야 한다.
$\therefore 4-4a+a^2-4=0$
$\therefore a=0,\ 4$
그런데 $a=0$이면,
공통범위는 $2 \leq x<3$이 되어 모순이다.
$\therefore a=4$

28. 두 부등식 $-x^2-3x+4 \leq 0$,
$x^2+ax+b<0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $1 \leq x < 3$일 때, 실수 a, b의 합 $a+b$를 구하면?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$-x^2-3x+4 \leq 0$, $x^2+3x-4 \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \leq -4$ 또는 $x \geq 1$

$\therefore$ $a=1,\ b=-12$ $\Rightarrow$ $a+b=-11$

29. 두 부등식 $|x-a|<2$, $x^2-2x+1-b^2 \le 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 없도록 하는 양수 a, b의 관계식은?

① $a-b \ge 3$ ② $a-b \le 3$ ③ $a-b > 3$

④ $a-b < 3$ ⑤ $a-b > -3$

해설

$-2 < x-a < 2$

$\Rightarrow \quad -2+a < x < 2+a$

$x^2-2x+1-b^2 \ge 0$

$\Rightarrow \{x-(1+b)\}\{x-(1-b)\} \le 0$

$\Rightarrow \quad 1-b \le x \le 1+b$

두 부등식의 공통범위가 없으려면

$2+a \le 1-b$이거나

$1+b \le -2+a$이어야 한다

$\Rightarrow a+b \le -1$ 또는 $a-b \ge 3$

30. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m<k\le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ -15 ④ -12 ⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4=4-k\ge 0,\ k\le 4$
ⅱ) $f(3)>0,\ k>3$ 따라서,
ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3<k\le 4$
$m=3,\ n=4$ 이므로 $mn=12$

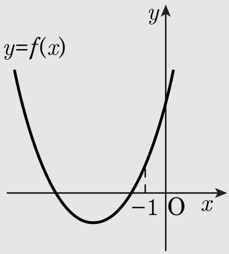
31. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4} = (-k)^2 - (6-k) > 0$ 에서
$k^2 + k - 6 > 0$, $(k+3)(k-2) > 0$
$\therefore\ k < -3$ 또는 $k > 2$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$
이상에서 $-7 < k < -3$
따라서 정수 k 는 -6, -5, -4 의 3 개다.

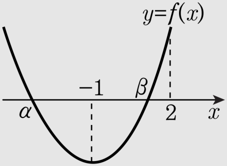
32. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$　② $-2<a<1$　③ $0<a<2$

④ $1<a<2$　⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(i) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$

$\therefore 0<a<2$

(ii) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$

$\therefore a<-3,\ a>-1$

(i), (ii)에서 $0<a<2$

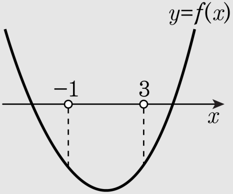
33. $-1<x<3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x)=x^2+2(k-1)x+3k$ 라 하자.
$-1<x<3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1)\le 0,\ f(3)\le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1)\le 0$ 에서 $(-1)^2+2(k-1)\cdot(-1)+3k\le 0,\ k+3\le 0$
$\therefore k\le -3$
(ii) $f(3)\le 0$ 에서 $3^2+2(k-1)\cdot 3+3k\le 0,\ 9k+3\le 0$
$\therefore k\le -\dfrac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $k\le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

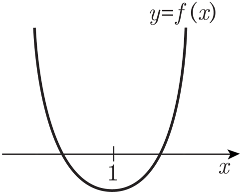
34. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 1보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a>-1$　　② $a>-2$　　③ $a>-3$

④ $a>-4$　　⑤ $a>-5$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 한 근은 1 보다 크고
다른 한 근은 1 보다 작으므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
즉, $f(1)<0$ 이므로 $-a-3<0$
$\therefore a>-3$



35. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-4=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근이 1과 2 사이에 있을 때, 상수 a의 범위는?

① $a>3$　② $0<a<3$　③ $a \geq \frac{1}{2}$

④ $a \geq 1$　⑤ $-1<a<3$

해설

주어진 조건을 만족시키려면 $f(-1)>0, f(0)<0, f(1)<0, f(2)>0$ 이어야 한다.

따라서 $f(-1)=a+(a+1)-4>0$ 에서

$2a>3 \quad \therefore\ a>\frac{3}{2} \cdots$ ㉠

$f(2)=4a-2a-2-4>0$ 에서

$2a>6 \quad \therefore\ a>3 \cdots$ ㉡

㉠,㉡을 모두 만족해야 하므로

구하는 a의 값의 범위는 $a>3$

36. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$　② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$　③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$　⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,

$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ n = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$

$\therefore n = 2$

$\therefore 2 < x < 3$

37. 부등식 $|2x+2| < a+3$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a \leq -4$ ② $a > -4$ ③ $a < -3$

④ $a > -3$ ⑤ $a \leq -1$

해설

ⅰ) $x \geq -1$일 때,

$2x+2 < a+3,\ 2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$

$x \geq -1,\ x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} > -1,\ a > -3$

ⅱ) $x < -1$일 때,

$-2x-2 < a+3,\ -2x < a+5$

$x < -1,\ x > -\frac{1}{2}a - \frac{5}{2}$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}a - \frac{5}{2} < -1 \quad \therefore a > -3$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $a > -3$

38. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$

④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

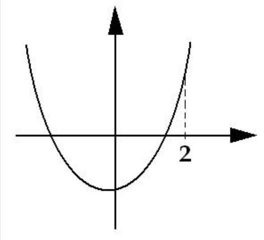
(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

39. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \ge 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ······ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \ge 0$에서 $k \le 1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \le 1$

k의 최댓값은 1이다.

40. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $|x-2|<\sqrt{3}$의 해와 같을 때, 이차부등식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$ 의 해를 구하면?

① $0<x<1$ ② $1<x<2$ ③ $2<x<3$

④ $3<x<4$ ⑤ $4<x<5$

해설

$|x-2|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}<0(\because a<0)$

$-\dfrac{b}{a}=4, \dfrac{c}{a}=1 \Rightarrow b=-4a, c=a$

그러면 주어진 식 $cx^2+(b+c)x+(a+b+5c)>0$에서

$ax^2+(-4a+a)x+a-4a+5a>0$

$ax^2-3ax+2a>0\ (\because a<0)$

$x^2-3x+2<0$

$(x-2)(x-1)<0$

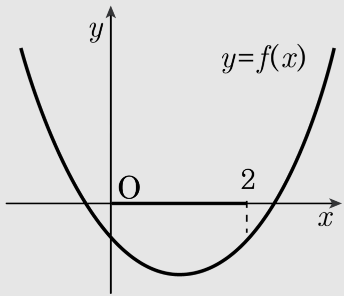
따라서 $1<x<2$

41. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

42. 연립부등식 $\begin{cases} x^3-2x^2+x-2 \geq 0 \\ x^2-x-6<0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$ ② $-2 < x < 3$ ③ $2 \leq x < 3$

④ $2 < x \leq 3$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2-2x+x-2 \geq 0$에서

$x^2(x-2)+(x-2) \geq 0$

$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$

$x^2+1>0$이므로 $x-2 \geq 0$

$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎

$x^2-x-6<0$에서 $(x-3)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<3 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$2 \leq x < 3$이다.

43. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\dfrac{4}{\sqrt{3}}<a<\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

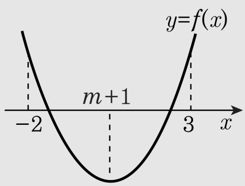
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위 : $-2<a<2$

44. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

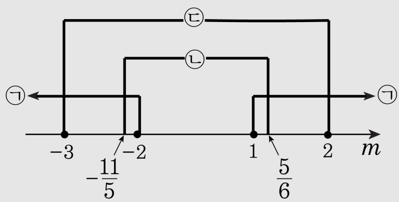
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\dfrac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\dfrac{6}{5}$

$\therefore -\dfrac{11}{5}<m<\dfrac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\dfrac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\dfrac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

45. $|p|<2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1>2x+p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x=-1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x=1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2+px+1>2x+p$, $(x-1)p+x^2-2x+1>0$
$f(p)=(x-1)p+x^2-2x+1$이라 하면, $f(p)>0$이다.
$-2<p<2$에서 $f(p)>0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2-4x+3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2-1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x=1$, $x \ge 3$
그런데 $x=1$ 일 때 $f(p)=0 \cdot p+1^2-2\cdot 1+1=0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

46. 두 이차함수 $f(x) = x^2 - x + 2a + 1$, $g(x) = 2x^2 - ax + 3a$에 대하여 $f(x) > g(x)$를 만족하는 실수 x가 존재하도록 a의 값의 범위를 정하면 $a < \alpha$ 또는 $a > \beta$이다. 이 때, 두 상수 α, β의 곱 $\alpha\beta$의 값은? (단, $\alpha < \beta$이다.)

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$f(x) > g(x)$ 이므로 $x^2 - x + 2a + 1 > 2x^2 - ax + 3a$

$x^2 - (a-1)x + (a-1) < 0$

위의 부등식을 만족하는 x 의 값이 존재하려면

이차방정식 $x^2 - (a-1)x + (a-1) = 0$ 의 판별식을 D라 할 때,

$D > 0$ 이어야 하므로 $D = (a-1)^2 - 4(a-1) > 0$

$(a-1)(a-5) > 0$

$\therefore a < 1$ 또는 $a > 5$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 5$이므로 $\alpha\beta = 5$