1. 연립부등식 $a+1 < \frac{x}{2} < \frac{a+11}{6}$ 의 해가 $-2 < x < 3$일 때, 상수 a의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

$a+1 < \frac{x}{2}$, $2a+2 < x$

$\frac{x}{2} < \frac{a+11}{6}$, $x < \frac{a+11}{3}$

$2a+2 < x < \frac{a+11}{3}$ 과 $-2 < x < 3$이 같으므로

$2a+2 = -2$

$\therefore\ a = -2$

2. $a-1<x<a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1<x<3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0<a<2$　② $0\le a\le 2$　③ $a<0,\ a>2$
④ $a\le 0,\ a\ge 2$　⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1\ge -1$ 이고, $a+1\le 3$ 이어야 하므로
$a\ge 0,\ a\le 2$
$\therefore\ 0\le a\le 2$

3. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x가 될 수 없는 것은?

① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.
따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.
이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15(\mathrm{g})$ 이다.
여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.
농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \le \frac{15}{100+x} \times 100 \le 12$ 이다.
이를 연립방정식으로 나타내면
$$\begin{cases} 10 \le \frac{15}{100+x} \times 100 \\ \frac{15}{100+x} \times 100 \le 12 \end{cases}$$
이고, 정리하면
$$\begin{cases} x \le 50 \\ x \ge 25 \end{cases}$$
이다. 따라서 $25 \le x \le 50$ 이다.

4. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y = 2[x] + 3$, $y = 3[x-2] + 5$를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x에 대하여 $x + y$의 범위를 구하면?

① $13 < x + y < 14$
② $14 < x + y < 15$
③ $-4 < x + y < 4$
④ $15 < x + y < 16$
⑤ $x + y = 16.4$

해설

$2[x] + 3 = 3[x-2] + 5$, $2[x] + 3 = 3([x] - 2) + 5$

$\therefore [x] = 4$

x가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$y = 2[x] + 3 = 11$이므로 $15 < x + y < 16$

5. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$ ② $-2 \le x < 0$ ③ $-1 \le x < 1$
④ $-1 \le x < 0$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$
$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$
$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$
$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \le x-1 < 0$이므로
$-1 \le x < 1$

6. 모든 실수 x에 대하여 $(|a|+a)x \geq a^2+a-20$이 성립할 때, 정수 a의 개수를 구하면?

① 9 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

$(|a|+a)x \geq a^2+a-20$에서
a의 부호에 따라 범위를 나누면,
① $a<0 : |a|=-a$
$0 \cdot x \geq a^2+a-20,\ (a+5)(a-4) \leq 0$에서
$-5 \leq a \leq 4$
$\therefore\ -5 \leq a < 0$
② $a=0 : 0 \cdot x \geq -20$이므로, 항상 성립한다.
$\therefore\ a=0$
③ $a>0 : |a|=a$
$2a \cdot x \geq a^2+a-20,\ x \geq \frac{1}{2a}(a^2+a-20)$
모든 x에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.
$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,
따라서 정수 a의 개수는 6 개

7. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\leq b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\mathrm{D}/4 = k^2-k \geq 0, k(k-1) \geq 0,\ \therefore\ k \leq 0,\ \ k \geq 1$

$f(x) = x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1) = 1-k > 0$

$\therefore\ k < 1$

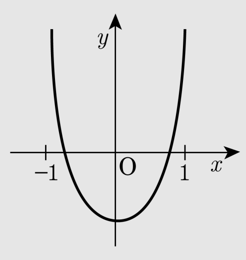
$f(1) = 1+3k > 0 \therefore\ k > -\frac{1}{3}$

대칭축 $x = -k$ 이므로 $-1 < -k < 1$

$\therefore\ -1 < k < 1$

$\therefore -\frac{1}{3} < k \leq 0$

$\therefore\ ab = 0$



8. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　④ $\sqrt{5}$　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

9. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 원 $x^2+y^2-6ax+2ay+20a-10=0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2,\ -1)$　② $(3,\ -2)$　③ $(2,\ -2)$
④ $(-1,\ -2)$　⑤ $(3,\ -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면
$a(-6x+2y+20)+(x^2+y^2-10)=0$

$$\begin{cases} -6x+2y+20=0 \rightarrow y=3x-10\cdots① \\ x^2+y^2=10\cdots② \end{cases}$$

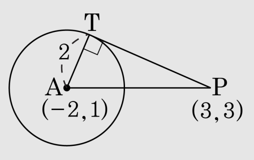
①, ②를 연립하면
$x^2+(3x-10)^2=10$
$x^2-6x+9=0 \rightarrow (x-3)^2=0$
$\therefore\ x=3,\ y=-1$

11. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{26}$　　③ 6　　④ $\sqrt{37}$　　⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (–2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{PT}^2=\overline{PA}^2-\overline{AT}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{PT}=5$

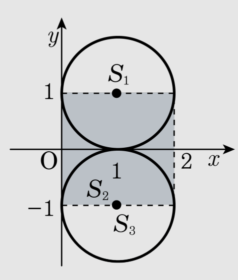
12. 평행이동 $f:(x,\ y)\to(x, y+b)\ (-2\le b\le 0)$ 에 의하여 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 이 옮겨지면서 만드는 자취의 넓이는?

① $\pi+2$　　② $\pi+4$　　③ $2\pi+2$

④ $2\pi+4$　　⑤ 2π

해설

평행이동 f 에 의하여 옮겨진 도형들은 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 을 y 축의 방향으로
0 부터 -2 까지 평행이동한 도형들이므로 옮겨진 도형이 만드는 자취는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이 S 는
$S=S_1+S_2+S_3=\pi+4$

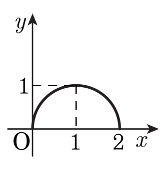
13. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

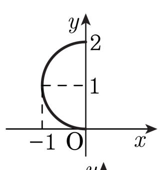
① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

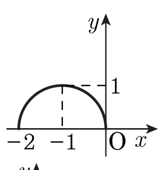
해설

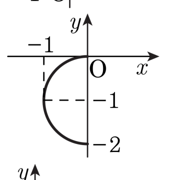
$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면
$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$9m^2+12m+4=4m^2+4$
$\therefore\ 5m^2+12m=0$
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$ 이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$

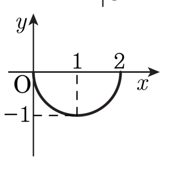
14. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

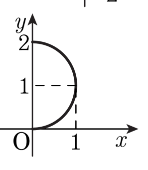


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

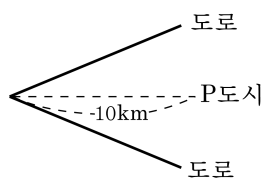
15. 두 부등식 $x^2-15x+36<0$, $|8-x|\ge a$을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때,
a의 값의 범위를 구하면?

① $1\le a\le 2$ ② $2\le a<3$ ③ $3\le a<4$
④ $2<a\le 3$ ⑤ $3<a\le 4$

해설

$x^2-15x+36<0$에서
$(x-3)(x-12)<0$이므로 $3<x<12$
$|8-x|\ge a$에서
$8-x\ge a$ 또는 $8-x\le -a$
$\therefore x\le 8-a,\ x\ge 8+a$
공통부분의 정수의 개수가 3개이므로
$3<x\le 8-a$에서 2개
$8+a\le x<12$에서 1개
$\left(\because \dfrac{8-a+8+a}{2}>\dfrac{3+12}{2}\right)$
$\therefore 5\le 8-a<6,\ 10<8+a\le 11$
$\therefore -3\le -a<-2,\ 2<a\le 3$
$\therefore 2<a\le 3$

16. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차 하고 있다. 두 도로의 교차점에서 $10\,\mathrm{km}$ 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ② $12\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ③ $14\sqrt{2}\,\mathrm{km}$

④ $16\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ⑤ $18\sqrt{2}\,\mathrm{km}$

해설

두 도로에 대한 점 P 의 대칭점을 각각 P′, P″ 이라 하면, $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}\geq\overline{P'P''}$

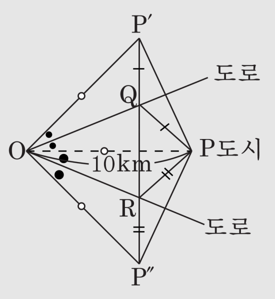
두 길의 교점을 O 라 하면

$\overline{PO}=\overline{P'O}=\overline{P''O}=10$ 이고

두 도로가 이루는 각이 $45°$ 이므로

$\angle P'OP''=90°$

따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''}=\ 10\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ 이다.



17. 네 점 $A(a,\ 2)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ -3)$, $D(b,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
$\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\frac{a+2}{2},\ \frac{2+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{3+b}{2},\ \frac{1+(-2)}{2}\right)$에서 $\frac{a+2}{2}=\frac{b+3}{2}$
$\therefore\ a-b=1 \cdots$ ㉠
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB}=\overline{BC}$이어야 하므로
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서
$(3-a)^2+(1-2)^2=(2-3)^2+(-3-1)^2$
$a^2-6a+10=17$, $a^2-6a-7=0$
$(a-7)(a+1)=0$
$\therefore\ a=7(\because\ a>0)$
이것을 ㉠에 대입하면 $b=6$
$\therefore\ a+b=13$

18. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$$d=\frac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

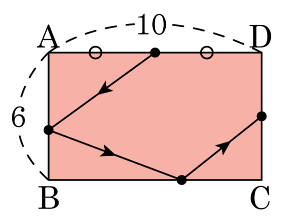
19. 좌표평면 위의 점 $A(-2,\ 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12　　② 13　　③ 14　　④ 15　　⑤ 16

해설

점P (a, b) 는 원 $x^2-4x+y^2=0$
위를 움직이고, 원의 중심 $C(2,\ 0)$ 과
점 $A(-2,\ 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 $(a,\ b)$,
$\triangle ACP$ 의 넓이를 n 이라 하면,
$\triangle ACP=\frac{1}{2}\times 4\times|b|=n$ (n 은 자연수, $|b|\le 2$)
$\therefore |b|=\frac{n}{2}$
$n=1,\ \ 2,\ \ 3$ 일 때, 점P 는 각각 4 개씩이고,
$n=4$ 일 때, 점 P 는 2 개
따라서 $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

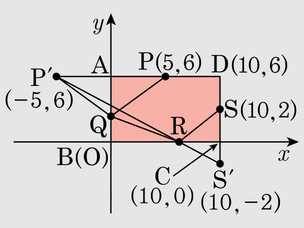
20. 직사각형 ABCD 에서 변 AD 의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC 를 거쳐 변 CD 를 1 : 2 로 내분하는 점에 이르는 최단 거리는? (단, $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=10$)



① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

해설

점 B가 원점이 되도록 직사각형 ABCD 를
좌표평면 위에 놓고 출발점을 P,
각 변과 만나는 점을 Q, R, S 라 할 때,
점 P 를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P′ ,
점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S′ 이라고 하자.



이 때, 네 점 P′ , Q , R , S′ 이 일직선 위에
있을 때 구하는 거리는 최솟값을 갖는다.
$\therefore$ P′$(-5,\ 6)$, S′$(10,\ -2)$ 에서
$\overline{\mathrm{P'S'}}=\sqrt{(10-(-5))^2+(-2-6)^2}=\sqrt{289}=17$