

1. 연립부등식 $a + 1 < \frac{x}{2} < \frac{a + 11}{6}$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

$$a + 1 < \frac{x}{2}, 2a + 2 < x$$

$$\frac{x}{2} < \frac{a + 11}{6}, x < \frac{a + 11}{3}$$

$$2a + 2 < x < \frac{a + 11}{3} \text{ 과 } -2 < x < 3 \text{ 이 같으므로}$$

$$2a + 2 = -2$$

$$\therefore a = -2$$

2. $a - 1 < x < a + 1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1 < x < 3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $a < 0, a > 2$

④ $a \leq 0, a \geq 2$

⑤ 구할 수 없다.

해설

$a - 1 \geq -1$ 이고, $a + 1 \leq 3$ 이어야 하므로

$$a \geq 0, a \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

3. 15%의 설탕물 300g이 있다. 여기에서 200g의 설탕물을 버리고 물 x g을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x 가 될 수 없는 것은?

① 25

② 32

③ 39

④ 47

⑤ 52

해설

설탕물을 200g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.

따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15%의 설탕물 100g이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15$ (g)이다.

여기에 물 x g을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \\ \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

4. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y = 2[x] + 3$, $y = 3[x - 2] + 5$ 를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x 에 대하여 $x + y$ 의 범위를 구하면?

① $13 < x + y < 14$

② $14 < x + y < 15$

③ $-4 < x + y < 4$

④ $15 < x + y < 16$

⑤ $x + y = 16.4$

해설

$$2[x] + 3 = 3[x - 2] + 5, \quad 2[x] + 3 = 3([x] - 2) + 5$$

$$\therefore [x] = 4$$

x 가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$$y = 2[x] + 3 = 11 \text{ 이므로 } 15 < x + y < 16$$

5. 부등식 $[x-1]^2 + 3[x] - 3 < 0$ 의 해는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \leq x < 1$

② $-2 \leq x < 0$

③ $-1 \leq x < 1$

④ $-1 \leq x < 0$

⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$$x - 1 = A \text{라 하면 } x = A + 1$$

$$\therefore [A]^2 + 3[A + 1] - 3 = [A]^2 + 3[A] + 3 - 3 < 0$$

$$[A]([A] + 3) < 0 \quad \therefore -3 < [A] < 0$$

$$-2 \leq A < 0 \quad \therefore -2 \leq x - 1 < 0 \text{ 이므로}$$

$$-1 \leq x < 1$$

6. 모든 실수 x 에 대하여 $(|a| + a)x \geq a^2 + a - 20$ 이 성립할 때, 정수 a 의 개수를 구하면?

① 9개

② 6개

③ 5개

④ 4개

⑤ 3개

해설

$(|a| + a)x \geq a^2 + a - 20$ 에서
 a 의 부호에 따라 범위를 나누면,

① $a < 0 : |a| = -a$

$0 \cdot x \geq a^2 + a - 20, (a + 5)(a - 4) \leq 0$ 에서
 $-5 \leq a \leq 4$

$\therefore -5 \leq a < 0$

② $a = 0 : 0 \cdot x \geq -20$ 이므로, 항상 성립한다.

$\therefore a = 0$

③ $a > 0 : |a| = a$

$2a \cdot x \geq a^2 + a - 20, x \geq \frac{1}{2a}(a^2 + a - 20)$

모든 x 에 대해서 위 부등식이 성립할 수 없다.

$\therefore$ ①과 ②를 동시에 만족하는 a 의 범위는 $-5 \leq a \leq 0$,
따라서 정수 a 의 개수는 6개

7. 이차방정식 $x^2 + 2kx + k = 0$ 의 두 근이 모두 -1 과 1 사이에 있기 위한 k 값의 범위가 $a < k \leq b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$$D/4 = k^2 - k \geq 0, k(k-1) \geq 0, \therefore k \leq$$

$$0, k \geq 1$$

$$f(x) = x^2 + 2kx + k \text{라 하면}$$

$$f(-1) = 1 - k > 0$$

$$\therefore k < 1$$

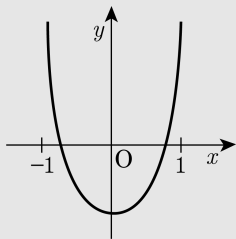
$$f(1) = 1 + 3k > 0 \therefore k > -\frac{1}{3}$$

$$\text{대칭축 } x = -k \text{ 이므로 } -1 < -k < 1$$

$$\therefore -1 < k < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < k \leq 0$$

$$\therefore ab = 0$$



8. 직선 $(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\sqrt{5}$

⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x + (k-1)y + 2 = 0$ 을 k 에 대하여
정리하면 $k(x+y) + (-3x-y+2) = 0$ 이 식이
 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y=0, -3x-y+2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-1$

따라서 점 $(1, -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

9. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2 + (1+k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. 원 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$ 은 정수 a 의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

① $(2, -1)$

② $(3, -2)$

③ $(2, -2)$

④ $(-1, -2)$

⑤ $(3, -1)$

해설

a 에 대한 항등식 꼴로 나타내면

$$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②를 연립하면

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

11. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5

② $\sqrt{26}$

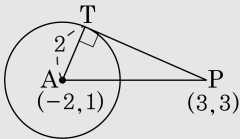
③ 6

④ $\sqrt{37}$

⑤ 7

해설

준식에서 $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 $(-2, 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\begin{aligned}\overline{PT}^2 &= \overline{PA}^2 - \overline{AT}^2 \\ &= (3 + 2)^2 + (3 - 1)^2 - 2^2 \\ &= 25\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{PT} = 5$$

12. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x, y+b) \ (-2 \leq b \leq 0)$ 에 의하여 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 옮겨지면서 만드는 자취의 넓이는?

① $\pi + 2$

② $\pi + 4$

③ $2\pi + 2$

④ $2\pi + 4$

⑤ 2π

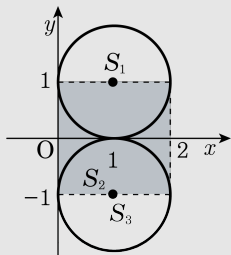
해설

평행이동 f 에 의하여 옮겨진 도형들은 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 을 y 축의 방향으로

0 부터 -2 까지 평행이동한 도형들이므로 옮겨진 도형이 만드는 자취는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 영역의 넓이 S 는

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi + 4$$



13. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y = mx$ 에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$

② $-\frac{7}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{3}{5}$

⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동시키면
 $(-x)^2 + y^2 - 6(-x) - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

$$\therefore (x+3)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 직선 $mx - y = 0$ 에 접하므로 이 직선과 $(-3, 2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.

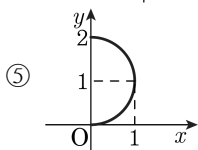
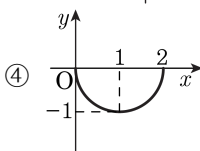
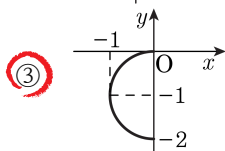
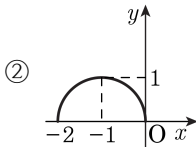
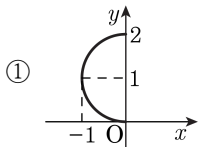
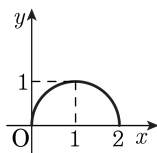
$$\text{즉, } \frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2$$

$$9m^2 + 12m + 4 = 4m^2 + 4$$

$$\therefore 5m^2 + 12m = 0$$

$$\text{따라서, } m = 0 \text{ 또는 } m = -\frac{12}{5} \text{ 이므로 그 합은 } 0 + \left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

14. 도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프로 옳은 것은?



해설

도형 $f(-y, -x) = 0$ 의 그래프는

도형 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를

직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

15. 두 부등식 $x^2 - 15x + 36 < 0$, $|8 - x| \geq a$ 을 만족하는 정수의 개수가 3개일 때,
 a 의 값의 범위를 구하면?

① $1 \leq a \leq 2$

② $2 \leq a < 3$

③ $3 \leq a < 4$

④ $2 < a \leq 3$

⑤ $3 < a \leq 4$

해설

$x^2 - 15x + 36 < 0$ 에서

$(x - 3)(x - 12) < 0$ 이므로 $3 < x < 12$

$|8 - x| \geq a$ 에서

$8 - x \geq a$ 또는 $8 - x \leq -a$

$\therefore x \leq 8 - a, x \geq 8 + a$

공통부분의 정수의 개수가 3개이므로

$3 < x \leq 8 - a$ 에서 2개

$8 + a \leq x < 12$ 에서 1개

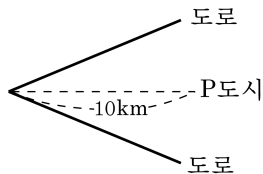
$\left(\because \frac{8 - a + 8 + a}{2} > \frac{3 + 12}{2} \right)$

$\therefore 5 \leq 8 - a < 6, 10 < 8 + a \leq 11$

$\therefore -3 \leq -a < -2, 2 < a \leq 3$

$\therefore 2 < a \leq 3$

16. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km

② $12\sqrt{2}$ km

③ $14\sqrt{2}$ km

④ $16\sqrt{2}$ km

⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} =$

$$\overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''} \geq \overline{P'P''}$$

두 길의 교점을 O 라 하면

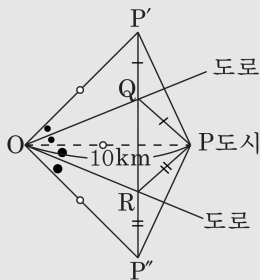
$$\overline{PO} = \overline{P'O} = \overline{P''O} = 10 \text{ 이고}$$

두 도로가 이루는 각이 45° 이므로

$$\angle P'OP'' = 90^\circ$$

따라서 피타고라스 정리에 의하여 새

로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$ km 이다.



17. 네 점 $A(a, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, -3)$, $D(b, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되게 하는 실수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$$\text{즉, } \left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) \text{에서 } \frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$$

$$\therefore a - b = 1 \cdots \text{㉠}$$

이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가 같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$$

$$a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$$

$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

이것을 ㉠에 대입하면 $b = 6$

$$\therefore a + b = 13$$

18. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선이 점 $(a, -1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(a, -1)$ 라 하면
점 P 에서 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리가
같으므로

$$d = \frac{|2a + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$|2a| = |a - 3|$$

$$\therefore 2a = a - 3 \text{ 또는 } 2a = -(a - 3) \text{ 이므로}$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{따라서 } a \text{ 의 값의 합은 } -3 + 1 = -2$$

19. 좌표평면 위의 점 $A(-2, 0)$ 과 중심이 C 인 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여, $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는 점 P 의 개수는?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

점 $P(a, b)$ 는 원 $x^2 - 4x + y^2 = 0$

위를 움직이고, 원의 중심 $C(2, 0)$ 과

점 $A(-2, 0)$ 에 대하여 P 의 좌표를 (a, b) ,

$\triangle ACP$ 의 넓이를 n 이라 하면,

$$\triangle ACP = \frac{1}{2} \times 4 \times |b| = n \quad (n \text{ 은 자연수, } |b| \leq 2)$$

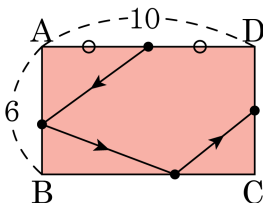
$$\therefore |b| = \frac{n}{2}$$

$n = 1, 2, 3$ 일 때, 점 P 는 각각 4 개씩이고,

$n = 4$ 일 때, 점 P 는 2 개

따라서 $\triangle ACP$ 의 넓이가 자연수가 되게 하는
점 P 의 개수는 총 14 (개)

20. 직사각형 ABCD에서 변 AD의 중점에서 출발하여 변 AB, 변 BC를 거쳐 변 CD를 1 : 2로 내분하는 점에 이르는 최단 거리는? (단, $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 10$)



① 13

② 14

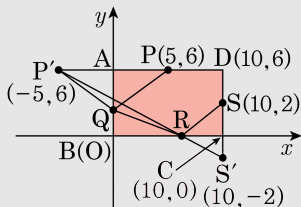
③ 15

④ 16

⑤ 17

해설

점 B가 원점이 되도록 직사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓고 출발점을 P, 각 변과 만나는 점을 Q, R, S 라 할 때, 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P', 점 S를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 S'이라고 하자.



이 때, 네 점 P', Q, R, S' 이 일직선 위에 있을 때 구하는 거리는 최솟값을 갖는다.

∴ P'(-5, 6), S'(10, -2)에서

$$\overline{P'S'} = \sqrt{(10 - (-5))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{289} = 17$$