1. 이차함수 $y = x^2 - 4x - 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -11

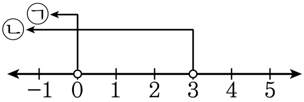
해설

$y = x^2 - 4x - 7$

$= (x-2)^2 - 11$

$x = 2$ 일 때, 최솟값 -11 을 갖는다.

2. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x<0$

해설

$x<0$ 과 $x<3$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.

$\therefore\ x<0$

3. 다음은 연립부등식 $2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 를 세 친구가 각각 풀이한 것이다.
다음 중 풀이 과정을 틀린 친구는 누구인지 찾아라.

<지윤>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $-x+2 < 2x+1$
$-x-2x < 1-2$
$-3x < -1$
$x > \frac{1}{3}$
⋮

<미진>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 의 각 변에 $2x$ 를 빼면
$-4 \le -3x+2 < 1$ 이다.
그리고 각 변에 2를 뺀 후 각 변에 -3 으로 나누면
$-6 \le -3x < -1$
$\frac{1}{3} < x \le \frac{6}{3}$
⋮

<동호>
$2x-4 \le -x+2 < 2x+1$ 을 나누어 풀면
① $2x-4 \le -x+2$
$2x+x \le 2+4$
$3x \le 6$
$x \le 2$
② $2x-4 < 2x+1$
⋮

▶ 답 :

▷ 정답 : 동호

해설

(풀이) 지윤이의 풀이와 미진이의 풀이는 제대로 풀었다. 동호의 풀이는
②
$2x-4 < 2x+1$
부분을 $-x+2 < 2x+1$ 로 고쳐서 풀어야 한다.

4. 부등식 $|x-1|<2$을 풀면?

① $-1<x<0$

② $-1<x<3$

③ $1<x<3$

④ $x<-1$ 또는 $x>3$

⑤ $\frac{1}{2}<x<1$

해설

$|x-1|<2$에서 $-2<x-1<2$

$\therefore -1<x<3$

5. 두 점 A$(a,\ 1)$, B$(4,\ -3)$ 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$일 때, 실수 a의 값들의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\overline{AB} = \sqrt{(4-a)^2+(-3-1)^2} = 4\sqrt{5}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2-8a+32=80,\ a^2-8a-48=0$
$(a-12)(a+4)=0$
$\therefore\ a=12$ 또는 $a=-4$
따라서 구하는 값은 $12-4=8$

6. 세 꼭짓점 $A(0,0)$, $B(-5,5)$, $C(2,7)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 4)$ ③ $(-2,\ 1)$

④ $(2,\ -2)$ ⑤ $(-4,\ -8)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{0+(-5)+2}{3},\ \frac{0+5+7}{3}\right)=(-1,4)$$

7. 두 점 $(1,\ 3)$, $(a,\ 5)$ 를 지나는 직선의 기울기가 3 일 때, a 의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$\frac{5-3}{a-1}=3$ 에서 $a=\frac{5}{3}$

8. 다음 보기의 주어진 직선 중 서로 평행한 것끼리 짝지어진 것은?

보기

㉠ $6x+3y=4$ ㉡ $2x-y=1$

㉢ $x=-2y+1$ ㉣ $y=-2x+5$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉣ ④ ㉡, ㉢

해설

각각의 방정식을 y 에 대하여 정리하면

㉠. $6x+3y=4$ 에서 $y=-2x+\dfrac{4}{3}$

㉡. $2x-y=1$ 에서 $y=2x-1$

㉢. $x=-2y+1$ 에서 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

㉣. $y=-2x+5$

따라서, 서로 평행한 것은 ㉠, ㉣ 이다.

9. 좌표평면 위의 점 $(1,\ 2)$ 와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ 5

해설

점 $(1,2)$ 와 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리 d 는

$$\therefore\ d=\frac{|1\cdot 1+2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

10. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(3, 0)$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x = 1$ ② $y = 1$ ③ $y = x + 1$

④ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ⑤ $y = 2x - 1$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + y^2$

$\therefore\ y = 2x - 1$

11. 점 $(5,\ 1)$과 $(-1,\ 7)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=12$

② $(x-2)^2+(y-1)^2=15$

③ $(x-2)^2+(y-4)^2=18$

④ $(x-2)^2+(y-6)^2=21$

⑤ $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 $C(2, 4)$

구하는 원의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}=\sqrt{18}$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2=18$

12. 세 점 $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 원의 방정식이 $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$이라 할 때 $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+C=0 \cdots\cdots$ ㉡이라 하면

㉡는 점 $(1,1)$, $(2,-1)$, $(3,\ 2)$를 지나므로

$1+1+\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0,\ 4+1+2\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$,

$9+4+3\mathrm{A}+2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0$

$\therefore\ \mathrm{A}=-5,\ \mathrm{B}=-1,\ \mathrm{C}=4$

$\therefore\ x^2+y^2-5x-y+4=0$

$\therefore\ \mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}=20$

13. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

14. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$ ② $x<-5$ ③ $x>-5$

④ $x<5$ ⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots㉠$

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots㉡$

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\quad -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\quad -ax>-5a \quad \therefore x>5$

15. 두 점 $A(5, -11)$, $B(-4, 7)$ 일 때, 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표는 $P(a,\ b)$, 선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는 $Q(c,\ d)$ 이다. 이때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$P(a, b) = \left(\frac{2\cdot(-4)+1\cdot(5)}{2+1}, \frac{2\cdot 7+1\cdot(-11)}{2+1}\right)$$

$$= (-1,\ 1)$$

$$Q(c, d) = \left(\frac{2\cdot(-4)-1\cdot(5)}{2-1}, \frac{2\cdot 7-1\cdot(-11)}{2-1}\right)$$

$$= (-13,\ 25)$$

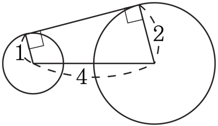
$$\therefore\ a+b+c+d = -1+1-13+25 = 12$$

16. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15}$ ③ 0 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



17. $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y=x\pm\sqrt{5}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{5}$ ③ $y=4x\pm2\sqrt{5}$

④ $y=5x\pm5\sqrt{5}$ ⑤ $y=x\pm2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm3\sqrt{1+2^2} \quad \leftarrow \quad m=2, r=3$

$\therefore y=2x\pm3\sqrt{5}$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$

$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$

따라서 m 의 최댓값은 1 이다.

19. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$의 최댓값을 M이라고 할 때, M의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x+a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a+2)^2 - 8$

따라서 M의 최솟값은 -8 이다.

20. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2-y^2+z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{3}=t$ 라 하면

$x=2t-1$, $y=5t+3$, $z=3t-2$ 이므로

$x^2-y^2+z^2=(2t-1)^2-(5t+3)^2+(3t-2)^2=-12t^2-46t-4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2-46\cdot\frac{2}{3}-4=-40$

21. 차가 16 인 두 수가 있다. 두 수의 곱의 최솟값을 구하면?

① 4 ② 32 ③ 43 ④ -26 ⑤ -64

해설

차가 16 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(x+16)$ 이다.

$y = x(x+16) = x^2 + 16x = (x^2 + 16x + 64) - 64$

$y = (x+8)^2 - 64$

22. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M-m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore \ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$일 때, $m=6$

$x=3$일 때, $M=18$

$\therefore \ M-m=12$

23. 실수 x, y가 $x^2+2y^2-2xy-4=0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2}-1$　② $2\sqrt{2}+1$　③ $2\sqrt{2}+2$

④ $\sqrt{2}+4$　⑤ $\sqrt{2}+5$

해설

$x^2+2y^2-2xy-4=0$을

(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2yx+2y^2-4=0$에서 x가 실수이므로

$$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2-4)\geq 0,\ \ y^2\leq 4$$

$\therefore\ -2\leq y\leq 2$

따라서, y의 최댓값은 2이다.

(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면

$2y^2-2xy+x^2-4=0$에서 y가 실수이므로

$$\frac{D'}{4}=x^2-2(x^2-4)\geq 0,\ \ x^2\leq 8$$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$

따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2}+2$

24. 가로의 길이가 5cm , 세로의 길이가 9cm 인 직사각형의 가로의 길이를 $x$cm 만큼 늘이고, 세로의 길이를 $x$cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 2.5　　④ 3　　⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2+4x+45 \\ &= -(x-2)^2+49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

25. 길이가 30m 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{15}{2}$m　② 8m　③ $\frac{17}{2}$m　④ 3m　⑤ 5m

해설

부채꼴의 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$, 반지름의 길이를 $x\,\mathrm{m}$ 라 하면

$y = \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (30 - 2x) \\ &= x(15 - x) \\ &= -x^2 + 15x \\ &= -\left(x^2 - 15x + \frac{225}{4} - \frac{225}{4}\right) \\ &= -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{225}{4} \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $\left(\frac{15}{2}, \frac{225}{4}\right)$ 이므로 반지름의 길이가 $\frac{15}{2}$ m 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $\frac{225}{4}$ m^2 을 가진다.

26. 지면으로부터 초속 30m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y=30x-5x^2$ 라고 한다. 이 물체의 높이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 45 m

해설

$y=-5x^2+30x=-5(x-3)^2+45$

27. x에 대한 삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3-ax^2+5x-b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\beta+\left(1-\sqrt{2}\right)\beta=5$

$-1+2\beta=5,\ 2\beta=6 \quad \therefore\ \beta=3$

따라서, $a=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+3=5$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3=-3$이므로

$a+b=5+(-3)=2$

28. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{3x-5}{8} < -1 \\ 1.5x+3.9 > -0.6+0.6x \end{cases}$ 을 만족하는 정수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{cases} \dfrac{3x-5}{8} < -1 \\ 1.5x+3.9 > -0.6+0.6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > -5 \end{cases}$$

따라서 $-5 < x < -1$ 을 만족하는 정수는 -4, -3, -2 이다.

29. x에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p < a < q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$을 만족해야 한다.

$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$

$a^2 - 8a + 12 < 0$

$(a - 6)(a - 2) < 0$

$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$

$\therefore \; pq = 2 \times 6 = 12$

30. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면

접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①

따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선

$mx-y-3m-1=0$과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$, $|-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$

따라서, 기울기 $m=\dfrac{1}{2},-2$

여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면

$y=-2x+5$

따라서 y절편은 5이다.

31. x, y 가 실수일 때, $2x^2-8x+y^2+2y+6$ 의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2x^2-8x+y^2+2y+6$

$=2\left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)+6$

$=2(x-2)^2+(y+1)^2-3$

x, y 는 실수이므로 $(x-2)^2\geq 0$, $(y+1)^2\geq 0$

$\therefore 2x^2-8x+y^2+2y+6\geq -3$

따라서, $x=2$, $y=-1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

32. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-y-2=0$

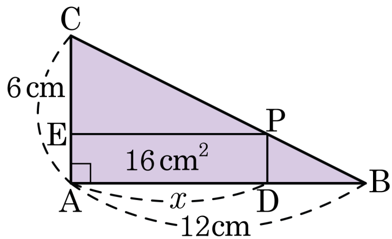
이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\left(y^2-y-2\right)\geq 0$$

$y^2-y-6\leq 0,\ (y+2)(y-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq y\leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

33. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 12\mathrm{cm}$, $\overline{\mathrm{AC}} = 6\mathrm{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 $16\mathrm{cm}^2$ 이었다. 이 때, $\overline{\mathrm{AD}}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{\mathrm{AD}} > 6\mathrm{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle\mathrm{CEP} \backsim \triangle\mathrm{CAB}$ (AA닮음) 이므로

$\overline{\mathrm{CE}} : \overline{\mathrm{EP}} = \overline{\mathrm{CA}} : \overline{\mathrm{AB}}$

즉, $\overline{\mathrm{CE}} : x = 6 : 12$

$\therefore \overline{\mathrm{CE}} = \dfrac{1}{2}x$

따라서 $\overline{\mathrm{EA}} = 6 - \dfrac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6 - \dfrac{1}{2}x\right) = 16$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 6x = 16$

$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = 8$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\mathrm{cm})$

34. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$ ② $a\le 1,\ 3\le a$ ③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$ ⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2 \cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3} \cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

35. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

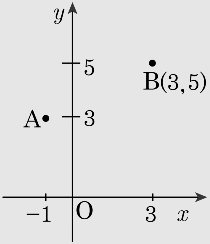
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



36. 세 직선 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $5x-ky-15=0$ 이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

① $-5 \leq k \leq 5$, $k < -10$

② $k=-10$, $k=\pm 5$

③ $-10 \leq k \leq -5$, $k \geq 5$

④ $k \neq -10$, $k \neq \pm 5$

⑤ $-5 \leq k \leq -5$, $k \geq 5$

해설

$$\begin{cases} x-y=0 & \cdots ㉠ \\ x+y-2=0 & \cdots ㉡ \\ 5x-ky-15=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

이 삼각형이 되려면 세 직선이 한 점에서 만나지 않고 어느 두 직선도평행하지 않아야 하므로

㉠, ㉡ 의 교점은 $(1,\ 1)$ 이 ㉢ 위에 있지 않다.

$\therefore\ 5-k-15 \neq 0 \qquad \therefore\ k \neq -10$

㉠, ㉢ 은 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{5} \neq \frac{-1}{-k} \rightarrow k \neq 5$$

㉡, ㉢ 도 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{5} \neq \frac{1}{-k} \rightarrow k \neq -5$$

$\therefore\ k \neq -10$, $k \neq \pm 5$

37. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(2, a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(2, a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로
원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \dfrac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

38. 원 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ 위의 임의의 점에서 직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 최단거리는 얼마인지 구하면?

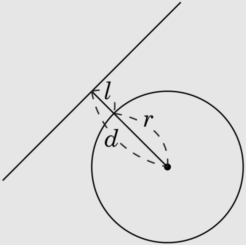
① $\sqrt{2}-2$　② $2\sqrt{2}-2$　③ $3\sqrt{2}-2$

④ $2\sqrt{3}-2$　⑤ $3\sqrt{2}+2$

해설

원의 중심과 직선의 거리를 d , 최단거리를 l ,
원의 반지름을 r 이라고 하면
최단거리는 원 중심에서 직선에 이르는 거리에서
원 반지름을 뺀 값과 일치한다.
원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ 이고,
직선의 방정식은 $y=x+2$ 이다.
원의 중심은 $(1,\ -1)$ 이고 $r=2$ 이므로

$$\therefore\quad l=\frac{|1+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}-2=2\sqrt{2}-2$$



39. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 x, y, z 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$x+y=6k$

$y+z=9k$

$z+x=11k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=13k$

따라서 $x=4k,\ y=2k,\ z=7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$\frac{x+y+z}{3}\le 5$ 에서 $13k\le 15$

$\therefore\ k\le\frac{15}{13}$

k 는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $x=4,\ y=2,\ z=7$ 이고,

이 중 가장 큰 수는 7 이다.

40. 원가에 2 할의 이익률로 정가를 정한 상품을 $x\%$ 의 할인율로 할인 판매하였을 때, 이익률이 0% 이상 10% 이하가 되게 하려고 한다. 자연수 x의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

원가를 a 원이라 하면 정가는 $1.2a$ 원이고
정가의 $x\%$ 를 할인한 가격은 $1.2a(1-0.01x)$ 원이다. 이익률이 0% 이상 10% 이하가 되려면
$a \le 1.2a(1-0.01x) \le 1.1a$
$\therefore\ \frac{25}{3} \le x \le \frac{50}{3}$
x가 될 수 있는 자연수는
9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
따라서 x의 최댓값은 16