1. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3 ② 7 ③ -2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로

$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.

(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$

(최솟값)$=-3$

2. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로

$a-2>0$

$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$

$\therefore a=4$

3. 두 점 A $(-1,1)$, B $(1,5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(3,0)$ ② $(5,0)$ ③ $(0,3)$ ④ $(0,5)$ ⑤ $(0,7)$

해설

y 축 위의 점을 $(0,a)$라 하면

$\therefore 1^2+(a-1)^2=1^2+(a-5)^2$ 정리하면

$a=3$

4. 두 점 A(6, -4), B(1, 1)을 이은 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① (8, -10) ② (8, -8) ③ (8, -6)
④ (10, -8) ⑤ (10, -6)

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times1+3\times6}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)=(4,\ -2)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times1-3\times6}{2-3},\ \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)=(16,\ -14)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+16}{2},\ \frac{-2+(-14)}{2}\right)$$

$\therefore$ (10, -8)

5. 기울기가 2 이고, y 절편이 -3 인 직선의 방정식은?

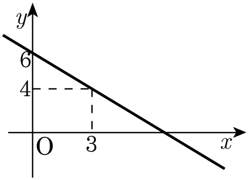
① $y=2x+3$ ② $y=2x-3$ ③ $y=3x+2$

④ $y=3x-2$ ⑤ $y=\frac{2}{3}x$

해설

기울기가 m 이고, y 절편이 b 인 직선의 방정식은 $y=mx+b$ 이므로 $y=2x-3$

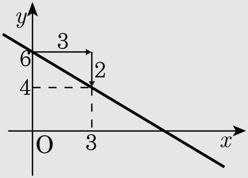
6. 다음 그림의 직선의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, $3a+b$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : $3a+b=4$

해설



(기울기)$=-\dfrac{2}{3}$ 이므로 $a=-\dfrac{2}{3}$

y 절편이 6 이므로 $b=6$

따라서 $3a+b=3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+6=4$

7. 점 $(2, -1)$과 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\therefore \text{ 거리} = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

8. 두 원 $x^2+y^2-x+2y-3=0$, $2x^2+2y^2-6x+ay-2=0$ 의 공통현이 직선 $y=-3x-1$ 과 직교할 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$2(x^2+y^2-x+2y-3)-(2x^2+2y^2-6x+ay-2)=0$

즉, $4x+(4-a)y-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=-3x-1$ 은 직교하므로

$\dfrac{-4}{4-a}\times(-3)=-1$ 에서 $a=16$

9. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$45 < (x-2) + x + (x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$$\rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases} \rightarrow 15 < x < \dfrac{55}{3}$$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15 , 17 , 19 이다.

10. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad\qquad), k < (\qquad\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

11. 직선 $y=-2x+a$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

직선 $y=-2x+a$ 가 원의 중심 $(2,\ 1)$ 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로

$a=2\times2+1=5$

12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

13. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x - 5$, $g(x) = 3x + 2$ 에 대하여 $F(x) = f(g(x))$ 라 정의하자.
$-2 \le x \le 3$ 에서 $F(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 48　② 56　③ 64　④ 72　⑤ 80

해설

$t = g(x) = 3x + 2$ 라 놓으면
$-2 \le x \le 3$ 에서 $-4 \le t \le 11 \cdots$ ㉠
$F(x) = f(t) = t^2 - 6t - 5 = (t - 3)^2 - 14$
㉠의 범위에서
$t = 3$ 일 때 $m = -14$
$t = 11$ 일 때 $M = 50$
$\therefore\ M - m = 50 - (-14) = 64$

14. 합이 18 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 17 ② 65 ③ 77 ④ 81 ⑤ 162

해설

두 수를 각각 x, $18-x$ 라고 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(18-x) \\
&= -x^2 + 18x \\
&= -(x^2 - 18x + 81 - 81) \\
&= -(x-9)^2 + 81
\end{aligned}
$$

$x = 9$ 일 때, 최댓값 81 을 갖는다.

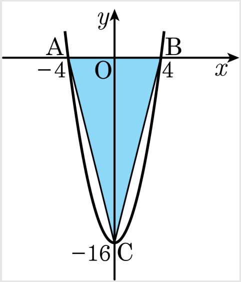
15. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

16. 둘레의 길이가 $20\,\mathrm{cm}$ 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a \\ &= -(a^2-10a+25)+25 \\ &= -(a-5)^2+25 \end{aligned}$$

$a=5,\ b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

17. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x - 2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

18. 연립부등식의 해가 $-2 < x < 3$ 일 때, 상수 a 의 값은?

$$\begin{cases} x - 4 > 3a \\ 4x - 5 < 7 \end{cases}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\begin{cases} x - 4 > 3a & \cdots ① \\ 4x - 5 < 7 & \cdots ② \end{cases}$ 라 하고

해를 구하면 ①에서 $x > 3a + 4$ 이고

②에서 $x < 3$ 이므로 공통 범위는

$3a + 4 < x < 3$

$\therefore\ 3a + 4 = -2$

$\therefore\ a = -2$

19. 모든 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1>0$이 성립할 때 a의 범위를 구하면?

① $a<-\frac{2}{3},\ a\geq 1$ ② $-1<a<1$ ③ $a<-1,\ a>1$
④ $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$ ⑤ $-\frac{5}{3}<\ a<1$

해설

(1) $a=1$일 때
(좌변)$=1>0$이므로 항상 성립한다.
(2) $a\neq 1$일 때
주어진 식이 성립하려면
$a^2-1>0,\ D<0$이어야 한다.
따라서 $a^2-1>0$에서 $(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-1,\ a>1$
또 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$에서
$3a^2+2a-5>0,\ (3a+5)(a-1)>0$
$\therefore\ a<-\frac{5}{3},\ a>1$
(1), (2)에서 $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$

20. 두 점 $(3,\ 2), (-1,\ 10)$을 지나는 직선에 수직이고 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-2y+4=0$ ② $2x+y-4=0$ ③ $x+2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-y-4=0$

해설

$(3,\ 2), (-1,\ 10)$을 지나는 직선의 방정식

$\Rightarrow y=\dfrac{10-2}{-1-3}(x+1)+10$

$\Rightarrow y=-2x+8$

이 직선의 수직한 직선의 기울기 : $\dfrac{1}{2}$

$(2,\ 3)$을 지나므로 $y=\dfrac{1}{2}(x-2)+3$

$x-2y+4=0$

21. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 에 직선 $y=mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

① $-\dfrac{12}{5}$ ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ $\dfrac{12}{5}$

해설

$x^2+y^2+6x-4y+9=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=4$
이것은 중심이 $(-3,\ 2)$,
반지름의 길이가 2 인 원이다.
이 원에 직선 $y=mx$ 가 접하므로
원의 중심 $(-3,2)$ 와 직선 $mx-y=0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.

즉, $\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$|-3m-2|=2\sqrt{m^2+1}\cdots$ ㉠

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2+12m=0 \quad \therefore\ m=0,\ -\dfrac{12}{5}$

따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\dfrac{12}{5}$ 이다.

22. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(ⅰ) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$

따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)

$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ⅱ) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$

따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

23. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$

④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2)$, $x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2$, $x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

24. 좌표평면에서 세 점 A$(-1,\ 1)$, B$(2,\ 2)$, C$(6,\ 0)$에 대하여 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① $(2,-1)$ ② $(2,-2)$ ③ $(2,-3)$

④ $(-2,3)$ ⑤ $(-2,-3)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기 : $\dfrac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ $\Rightarrow$ 수직이등분선

: $y=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\dfrac{2-1}{6-2}=\dfrac{1}{4}$, 중심은 $(4,\ 1)$ $\Rightarrow$ 수직이등분

선: $y=2(x-4)+1$

두 직선의 교점을 구해보면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$\therefore$ $(2,-3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

O$(x,\ y)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{CO}}$에서 $(x+1)^2+(y-1)^2=(x-6)^2+y^2$, $7x-y=17\ \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{CO}}$에서 $(x-2)^2+(y-2)^2=(x-6)^2+y^2$, $2x-y=7\ \cdots$ ㉡

㉠ ㉡에서 교점의 좌표는 $(2,\ -3)$

25. x, y 가 실수일 때, $f(x,\ y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -5

해설

$$
\begin{aligned}
f(x,\ y) &= x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y \\
&= x^2 - 2(y-1)x + 2y^2 + 2y \\
&= \{x-(y-1)\}^2 + (y+2)^2 - 5
\end{aligned}
$$

따라서 $x = -3,\ y = -2$ 일 때, 최솟값 -5