1. 이차방정식 $2x^2-4x-6=0$ 의 두 근의 합과 곱이 $x^2+bx+c=0$ 의 두 근일 때, $b+c$ 의 값은?(단, b , c 는 상수)

① -9　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -1

해설

이차방정식 $2x^2-4x-6=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면, $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-3$

$x^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $2,\ -3$ 이라고 할 때,

$-b=2-3=-1,\ 2\times(-3)=c$

$\therefore\ b=1,\ c=-6$

$\therefore\ b+c=-5$

2. n 각형의 대각선의 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$ 이라 한다. 대각선이 35 개인 다각형은 몇 각형인지 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 각형

▷ 정답: 10각형

해설

$\frac{n(n-3)}{2}=35$

$n(n-3)=70$

$n^2-3n-70=0$

$(n-10)(n+7)=0$

$n=10$ 또는 $n=-7$

따라서 10 각형이다.

3. 땅으로부터 높이 15m 되는 다이빙대에서 수영선수가 위를 향해 초속 27m 로 다이빙을 했다. x 초 후 수영선수가 지상으로부터의 떨어져있는 높이는 $(-3x^2 + 27x + 15)$m 라고 할 때, 수영선수의 높이가 57m 가 되는 데 걸리는 나중 시간은?

① 2 초 ② 5 초 ③ 7 초 ④ 9 초 ⑤ 11 초

해설

$-3x^2 + 27x + 15 = 57$
$3(x^2 - 9x + 14) = 0$
$3(x-2)(x-7) = 0$
$x = 2,\ 7$
따라서 나중 시간은 7 초 이다.

4. 포물선 $y = x^2 + 4ax + 2a - 1$ 이 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$x^2 + 4ax + 2a - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β $(\alpha > \beta)$ 라고 하면

$\alpha + \beta = -4a,\ \alpha\beta = 2a - 1$

$\alpha - \beta = \sqrt{3}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$3 = 16a^2 - 8a + 4,\ \ 16a^2 - 8a + 1 = 0$

$(4a - 1)^2 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{4}$

5. 이차함수 $y = 2(x-4)^2 - 6$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동하여 $y = 2(x+3)^2 + 3$ 이 되었다. $p+q$ 의 값은?

① -10 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$y = 2(x-4-p)^2 - 6 + q$
$\quad = 2(x+3)^2 + 3$
$-4 - p = 3,\ p = -7$
$-6 + q = 3,\ q = 9$
$\therefore\ p + q = 2$

6. x 축과의 교점이 $(3,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 이고, 점$(1,\ 6)$ 을 지나는 이차함수의 식을 구하면?

① $y=x^2+x+6$
② $y=-x^2+x+6$
③ $y=x^2-x+6$
④ $y=x^2+x-6$
⑤ $y=-x^2-x+6$

해설

x 축과의 교점이 $(3,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ 이므로
$y=a(x-3)(x+2)$
점 $(1,\ 6)$ 을 지나므로
$6=a(1-3)(1+2)$, $a=-1$
$\therefore\ y=-(x-3)(x+2)=-x^2+x+6$

7. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 : $-\frac{9}{2}$ ② 최댓값 : $-\frac{7}{2}$ ③ 최솟값 : $\frac{9}{2}$
④ 최댓값 : $-\frac{9}{2}$ ⑤ 최솟값 : -1

해설

$y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$
$= -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$

따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{9}{2}$ 를 가진다.

8. 이차함수 $y = -x^2 - 4mx$ 의 최댓값이 16 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.(단, $m > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -x^2 - 4mx = -(x + 2m)^2 + 4m^2$
최댓값이 16 이므로 $4m^2 = 16$
$m > 0$ 이므로 $m = 2$ 이다.

9. 합이 18 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 17 ② 65 ③ 77 ④ 81 ⑤ 162

해설

두 수를 각각 x, $18-x$ 라고 하면

$y = x(18-x)$

$= -x^2 + 18x$

$= -(x^2 - 18x + 81 - 81)$

$= -(x-9)^2 + 81$

$x = 9$ 일 때, 최댓값 81 을 갖는다.

10. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

11. 이차방정식 $ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, 유리수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ 이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}+2$

근과 계수와의 관계에서

$-\dfrac{b}{a}=(\sqrt{5}+2)+(-\sqrt{5}+2)=4$, $\dfrac{5}{a}=(\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}+2)=-1$

$\therefore a=-5$

$\therefore b=-4a=(-4)\times(-5)=20$

$\therefore a+b=-5+20=15$

12. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2:3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1 ② ± 2 ③ ± 3 ④ ± 4 ⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k$, $3k(k \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2(x-2k)(x-3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$\therefore\ k = \pm 1$

$10k = 2a$ 이므로

$k = 1$ 일 때 $a = 5$

$k = -1$ 일 때 $a = -5$

$\therefore\ a = \pm 5$

13. 이차방정식 $4x^2-kx+9=0$ 이 중근을 가질 때, 두 양의 정수 k, $k-5$ 를 두 근으로 하는 이차방정식 A 는? (단, A 의 이차항의 계수는 1 이다.)

① $x^2+19x+84=0$

② $x^2-19x-84=0$

③ $x^2-84x+19=0$

④ $x^2-19x+84=0$

⑤ $x^2-20x+84=0$

해설

$4x^2-kx+9=0$ 이 중근을 가지므로

$k^2-4\times4\times9=0$

$k=12$ ($\because$ $k>0$)

따라서 두 근은 12, 7

$\therefore$ $(x-12)(x-7)=0$

$\therefore$ $x^2-19x+84=0$

14. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2 + 6x - 2 = 0$　　② $x^2 - 6x + 2 = 0$

③ $x^2 + 6x - 4 = 0$　　④ $x^2 - 6x + 4 = 0$

⑤ $x^2 + 6x - 6 = 0$

해설

α, β 는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

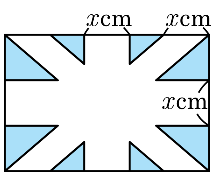
구하는 방정식의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 이므로

$$(\text{두 근의 합}) = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 6$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 2 + \frac{1}{\alpha\beta} = 4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 이다.

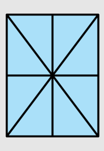
15. 가로, 세로 길이가 각각 9 cm, 6 cm 인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 일정한 폭으로 오려내어 조각의 합이 12 cm^{2}가 되도록 하려고 한다. 오려낸 부분의 폭은?



① 2 cm
② 3 cm
③ 4 cm
④ 2 cm 또는 7 cm
⑤ 3 cm 또는 6 cm

해설

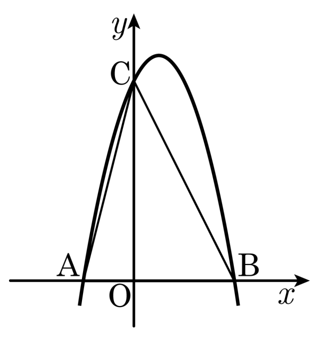
조각들을 모아 보면 다음 그림처럼 가로가 $9-3x$, 세로가 $6-x$인 직사각형이 됨을 알 수 있다. 넓이가 12 이므로 $(9-3x)(6-x)=12$



정리하면 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

$x<3$이므로 $x=2$

16. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 8$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이를 구하면?



① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

해설

$y = -x^2 + 2x + 8$ 의 C 의 좌표 $(0, 8)$

$-x^2 + 2x + 8 = 0$, $(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4$ 또는 $x = -2$

$\mathrm{A}(-2, 0), \mathrm{B}(4, 0)$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

17. $y=-3x^2+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 11 만큼 평행이동시킨 그래프의 x 절편과 y 절편을 연결한 삼각형의 넓이를 구하면?

① 16 ② 20 ③ 26 ④ 30 ⑤ 36

해설

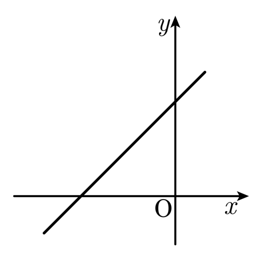
$y=-3x^2+1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 11 만큼 평행이동시킨 그래프는

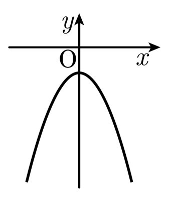
$y=-3(x-3)^2+12=-3x^2+18x-15$ 이므로

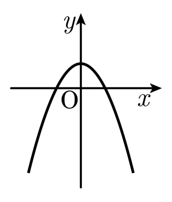
x 절편은 1과 5 , y 절편은 -15

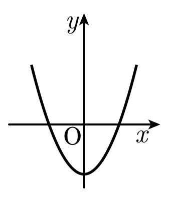
$\therefore$ (삼각형의넓이) $=\frac{1}{2}\times 4\times 15=30$

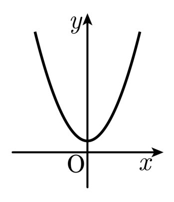
18. 일차함수 $y = ax+b$ 의 그래프가 다음그림과 같을 때 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프로 옳은 것은?

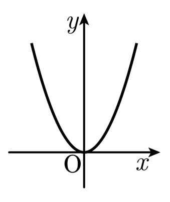


①


②


③


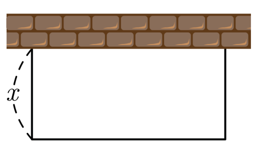
④


⑤


해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 꼭짓점은 y 축의 위에 있다.

19. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



① 3 m ② 4 m ③ 5 m
④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,
$y = x(20-2x)$
$= -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50$
$x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

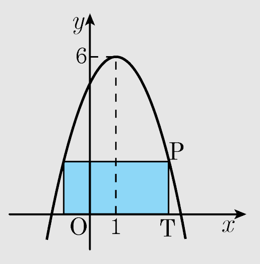
20. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$
\begin{aligned}
\text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1) - t^2 + 2t + 5] \\
&= 2(-t^2 + 4t + 3) \\
&= -2t^2 + 8t + 6 \\
&= -2(t-2)^2 + 14
\end{aligned}
$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

21. 밑면의 반지름의 길이가 7cm 이고 높이가 $h$cm 인 원기둥이 있다. 이 원기둥의 반지름의 길이를 조금 줄였더니 원기둥의 부피가 처음보다 64% 감소했을 때, 줄인 반지름의 길이는?

① 2.5cm ② 2.6cm ③ 2.7cm
④ 2.8cm ⑤ 2.9cm

해설

반지름의 줄인 길이를 x cm 라 하면
원래 원기둥의 부피는 $7^2\pi h$ cm
나중 원기둥의 부피는 $(7-x)^2\pi h$ cm
부피가 64% 감소했으므로
$(7-x)^2\pi h = 0.36\times 7^2\pi h$
$(7-x)^2 = (0.6\times 7)^2$
$x>0$ 이므로 $7-x=4.2$
$\therefore x = 2.8(\mathrm{cm})$

22. 이차함수 $y=-x^2-2x+p$ 의 그래프에서 x축과의 두 교점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표는?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$y=-x^2-2x+p=-(x+1)^2+p+1$
축의 방정식이 $x=-1$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이므로
$\therefore \mathrm{A}(-3,\ 0), \mathrm{B}(1,\ 0)$
$\mathrm{B}(1,\ 0)$ 을 $y=-x^2-2x+p$ 에 대입하면 $-1^2-2+p=0,\ \ \therefore p=3$
$\therefore y=-(x+1)^2+4$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 4)$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 -1 이다.

23. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 지나고 최솟값이 -3 일 때, 상수 a, b, c 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{1}{3}$

▷ 정답 : $b = \frac{2}{3}$

▷ 정답 : $c = -\frac{8}{3}$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 을 각각 지나므로

$16a - 4b + c = 0$

$4a + 2b + c = 0$

$\therefore\ b = 2a,\ c = -8a$

또 주어진 함수의 최솟값이 -3 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= ax^2 + 2ax - 8a \\ &= a(x+1)^2 - 9a \end{aligned}$$

$\therefore\ -9a = -3$

따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{8}{3}$ 이다.

24. 함수 $f(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{px^2 + 2x - p + 3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

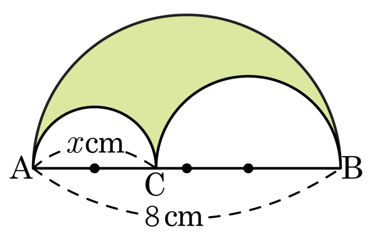
▷ 정답 : 2

해설

분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y = px^2 + 2x - p + 3 \cdots$ ㉠ 이 최댓값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $p > 0 \cdots$ ㉡
$D = p^2 - 3p + 1 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.

$p^2 - 3p + 1 < 0$ 에서 $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < p < \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$
따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.

25. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8-x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.