1. $-3a-2<-3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$
② $-3a>-3b$
③ $5a-3>5b-3$
④ $3-a>3-b$
⑤ $\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$

해설

$-3a-2<-3b-2 \cdots ㉠$
$(㉠+2)\div(-3)$ 하면, $a>b$이다.
따라서 만족하는 식은 $5a-3>5b-3$

2. $-6 < a \leq 12,\ 3 < b \leq 4$ 일 때, ab 값의 범위를 구하면?

① $-3 < ab \leq 16$ ② $-10 \leq ab \leq 9$ ③ $-10 < ab < 9$
④ $-24 < ab \leq 48$ ⑤ $-2 \leq ab \leq 4$

해설

$-6 < a \leq 12 \cdots\cdots$ ㉠
$3 < b \leq 4 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times$ ㉡
$-6 \times 4 < ab \leq 12 \times 4$

3. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$\mathrm{A}(-3, 5)$, $\mathrm{B}(6, -13)$

▶ 답 :

▷ 정답 : $9\sqrt{5}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(6+3)^2 + (-13-5)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5}$

4. 두 점 A $(-5, 1)$, B $(3, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표는?

① $(0, 0)$ ② $(0, 1)$ ③ $(0, 3)$
④ $(0, 4)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

y 축 위의 점을 Q $(0, a)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{QB}}$
$\therefore (0+5)^2 + (a-1)^2 = (0-3)^2 + (a-5)^2$
정리하면 $a = 1$ $\therefore$ Q $(0, 1)$

5. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$에 이르는 거리가 같은 점 P의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$

④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$로 놓으면

$$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2} = \sqrt{2a^2-2a+5}$$

$$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2} = \sqrt{2a^2-6a+9}$$

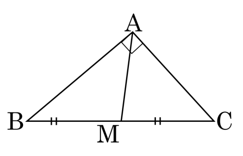
그런데 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5 = 2a^2-6a+9$

$4a=4$ 에서 $a=1$

$\therefore$ $\mathrm{P}(1,\ 1)$

6. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)$

$= \overline{BC}^2$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$

② 4 , $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

③ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

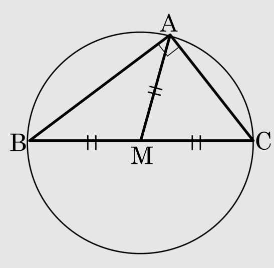
④ 2 , $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right)$$

$$= \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

7. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(2), \mathrm{B}(6)$을 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

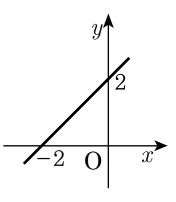
$\mathrm{P}(p)$, $Q(q)$라 하면

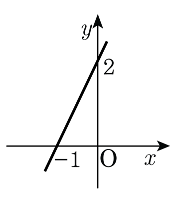
$$p = \frac{3 \cdot 6 + 1 \cdot 2}{3+1} = \frac{20}{4} = 5$$

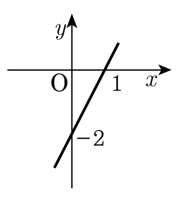
$$q = \frac{3 \cdot 6 - 1 \cdot 2}{3-1} = \frac{16}{2} = 8$$

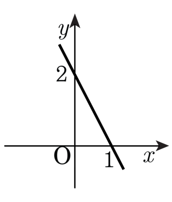
$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = |8-5| = 3$$

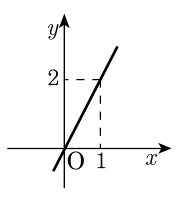
8. 다음 중 직선 $y = 2(x+1)$ 을 나타내는 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = 2(x+1) = 2x+2$ 이므로, 기울기가 2 이고,
y 절편이 2 인 그래프는 ②번이다.

9. 점 $(a+b,\ ab)$가 제 2사분면의 점일 때, $(a,\ a+b)$ 는 제 $\boxed{}$사분면, 점 $\left(\frac{b}{a}, b\right)$ 는 제$\boxed{}$사분면의 점이다. 다음 중 $\boxed{}$안에 들어갈 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① 1, 2　② 2, 3　③ 3, 4　④ 1, 4　⑤ 3, 2

해설

점 $(a+b,\ ab)$가 제 2사분면의 점이므로

$a+b<0,\ ab>0$

$\therefore\ a<0,\ b<0$

$\therefore\ a+b<0,\ \frac{b}{a}>0$

따라서 점 $(a,\ a+b)$는 제 3사분면의 점이고

점 $\left(\frac{b}{a},\ b\right)$는 제 4사분면의 각이다.

10. 두 점 $(a,\ 1)$, $(3,\ b)$ 가 x 절편이 4 이고, y 절편이 -2 인 직선 위에 있을 때, ab 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

x 절편이 4 이고,
y 절편이 -2 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1 \cdots$ ㉠
점 $(a,\ 1)$ 이 ㉠ 위에 있으므로 $\frac{a}{4}-\frac{1}{2}=1$ 에서
$a=6$
점 $(3,\ b)$ 가 ㉠ 위에 있으므로
$\frac{3}{4}-\frac{b}{2}=1$ 에서 $b=-\frac{1}{2}$
$\therefore ab=-3$

11. y 절편이 2 이고 직선 $3x-y+1=0$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{3}x-1$ ② $y=\frac{1}{3}x-2$ ③ $y=-3x+2$
④ $y=3x+2$ ⑤ $y=-\frac{1}{3}x+2$

해설

구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+2$ 이라 하면,
직선 $3x-y+1=0$ 에 수직이므로,
$3\cdot m=-1$, $\therefore\ m=-\frac{1}{3}$
$\therefore\ y=-\frac{1}{3}x+2$

12. 두 직선 $2x+ay+1=0$, $x+(a-3)y-4=0$이 평행할 때, 실수 a의 값은?

① -6 ② -3 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하므로

$\frac{2}{1}=\frac{a}{a-3}\neq-\frac{1}{4}$

$\therefore 2a-6=a, a\neq\frac{3}{5}$에서 $a=6$

13. 원점 O에서 직선 L : $ax - y + 1 = 0$에 내린 수선의 길이가 $\frac{1}{3}$일 때 음수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2\sqrt{2}$

해설

수선의 길이는 원점과 직선 L 사이의 거리이므로

$$\frac{|0-0+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 3$$

$$a^2 = 8$$

$$\therefore a = -2\sqrt{2}\ (\because a < 0)$$

14. 두 원 $x^2+y^2-4y-1=0$, $(x-1)^2+y^2=3$ 의 중심거리를 구하면?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2+y^2-4y-1=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-2)^2=5$

$\therefore$ 중심사이의 거리는 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

15. 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $(-5, 0)$ 에서 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $x=-1$　② $x=-2$　③ $x=-3$
④ $x=-4$　⑤ $x=-5$

해설
구하는 접선의 방정식은 $-5\cdot x+0\cdot y=25$
$-5x=25$
$\therefore x=-5$

16. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x - 5$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = -3x^2 + 6x - 5$
$= -3(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5$
$= -3(x - 1)^2 - 2$

$x = 1$ 일 때, 최댓값 -2 를 갖는다.

17. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

19. x에 대한 부등식 $x+2 \leq ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

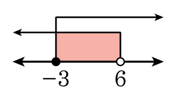
해설

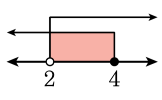
$x+2 \leq ax+3$에서 $(1-a)x \leq 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

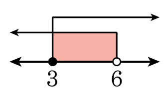
$1-a=0$

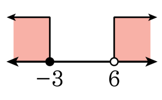
$\therefore a=1$

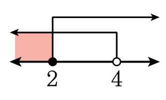
20. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \geq x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

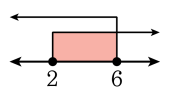
⑤ 

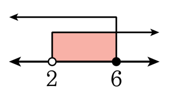
해설

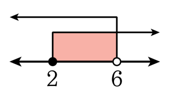
$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \geq x-8 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$

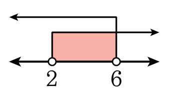
$\therefore -3 \leq x < 6$

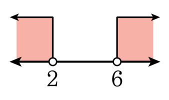
21. 다음 부등식 $1-4x<7-5x<x-5$ 을 수직선 위에 나타냈을 때, 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$1-4x<7-5x, \quad x<6$

$7-5x<x-5, \quad x>2$

$\therefore\ 2<x<6$

22. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax - 4 \geq 0$이 성립하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 3$

③ $-4 < a$

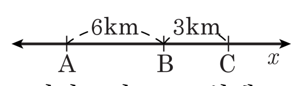
④ $-4 < a \leq 0$

⑤ $0 \leq a \leq 4$

해설

모든 실수 x에 대해 주어진 식이 성립하지 않으려면
$a \leq 0$이고 $D/4 = a^2 + 4a < 0$이어야 한다.
따라서 $a(a+4) < 0$이므로 $-4 < a < 0$이고
$a = 0$일 때도 성립하지 않으므로 $-4 < a \leq 0$

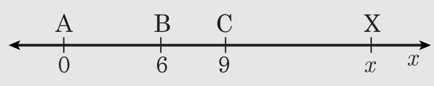
23. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0|=2|x-9|$
곧, $|x|=2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9)=\pm x$
$\therefore\ x=6$ 또는 $x=18$
여기서 $x=6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x=18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18-6=12$(km)

24. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ 3　　④ $2\sqrt{3}$　　⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점$(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

25. 중심이 직선 $y = x + 2$ 위에 있고, 점 $(4,\ 4)$ 를 지나며, y축에 접하는 원 중 반지름의 크기가 작은 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

② $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$

④ $(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

⑤ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 100$

해설

원의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ 으로 놓으면
중심 (a, b) 가 $y = x + 2$
위에 있으므로
$b = a + 2$ ⋯⋯⋯⋯ ㉠
점 $(4, 4)$ 를 지나므로
$(4-a)^2 + (4-b)^2 = a^2$ ⋯⋯⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(4-a)^2 + (4-a-2)^2 = a^2$
$a^2 - 12a + 20 = 0 \quad \therefore\ a = 2, 10$
$\therefore\ a = 2$ 일 때 $b = 4$, $a = 10$ 일 때 $b = 12$
따라서 구하는 방정식은
$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$,
$(x-10)^2 + (y-12)^2 = 100$

26. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

② 두 원이 외접한다.

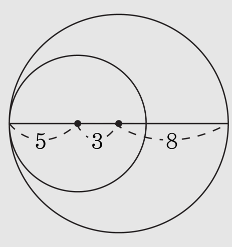
③ 두 원이 두 점에서 만난다.

④ 두 원이 내접한다.

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



27. 다음 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

28. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M이라고 할 때, M의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x-a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 M의 최솟값은 -9 이다.

29. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\ &= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\ &= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

최댓값 $M = 4a^2 + a - 2$

$$\begin{aligned} &= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16} \end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

30. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$

이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$을 가진다.

$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$

따라서 m은 $a = 1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

31. $x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}$ 을 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x-1=1-y=\dfrac{z-3}{2}=k$ 라 하면

$x=k+1,\ y=1-k,\ z=2k+3$

그러므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (k+1)^2+(1-k)^2+(2k+3)^2 \\ &= 6k^2+12k+11 \\ &= 6(k+1)^2+5 \end{aligned}$$

따라서, $k=-1$ 일 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 최솟값은 5 이다.

32. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 10

해설

두 수를 각각 x, $20-x$라 하면

$$y = x(20-x)$$
$$= -x^2 + 20x$$
$$= -(x-10)^2 + 100$$

$x = 10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore\ x = 10,\ 20 - x = 10$

따라서 두 수는 10, 10

33. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(16-x) \\
&= -x^2+16x \\
&= -(x^2-16x+64-64) \\
&= -(x-8)^2+64
\end{aligned}
$$

$x=8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

34. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

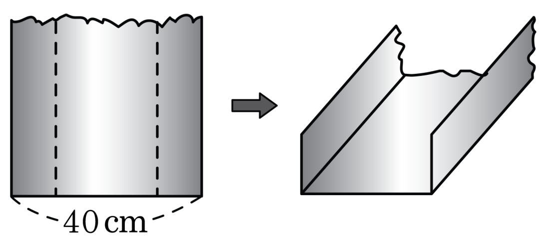
35. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면
$y = 2x - k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면
$x^2 + (2x - k)^2 = 5$
$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로
$m + \alpha + \beta = 6$

36. 너비가 40cm 인 양철판을 구부려서 'ㄷ'자 모양의 물받이를 만들었다. 물받이의 단면적의 넓이가 최대가 되는 높이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10 cm

해설

양철판의 높이를 $x$cm 라고 두고 단면적의 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라고 두면

$y = x(40 - 2x)$

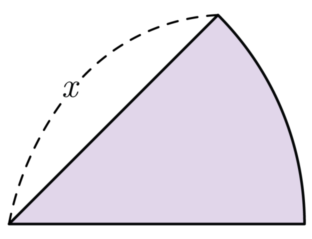
$= -2x^2 + 40x$

$= -2(x^2 - 20x + 100) + 200$

$= -2(x - 10)^2 + 200$ 이다.

따라서 $x = 10$ 일 때, 최댓값 200 을 가진다.

37. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

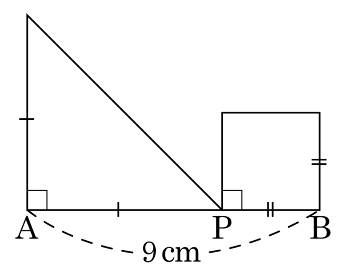
해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

38. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

39. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathrm{cm}^2}$

▷ 정답 : $100\,\underline{\mathrm{cm}^2}$

해설

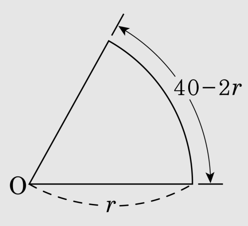
부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$

$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.



40. 연립부등식 $\begin{cases} 4(2-x) \le 5 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} > 1 \\ 2x - 3 \le 5 \end{cases}$ 를 풀어라.

① $\frac{3}{4} < x \le 4$　② $1 < x \le 4$　③ $\frac{3}{4} \le x < 1$
④ $\frac{3}{4} \le x < 4$　⑤ $1 \le x < 4$

해설

$$\begin{cases} 4(2-x) \le 5 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} > 1 \\ 2x - 3 \le 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{4} \\ x > 1 \\ x \le 4 \end{cases}$$

$\therefore\ 1 < x \le 4$

41. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 한 점 (a, b)를 지날 때 ab의 값을 구하면?

① 20 ② 10 ③ -10 ④ -20 ⑤ -30

해설

주어진 식을 k에 대해 정리하면
$(2y+x+4)k-2x-3y-3=0$이고
임의의 k에 대해 성립하려면
$2y+x+4=0,\quad 2x+3y+3=0$
연립하면 $x=6,\quad y=-5$
$\therefore\ ab=-30$

42. $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

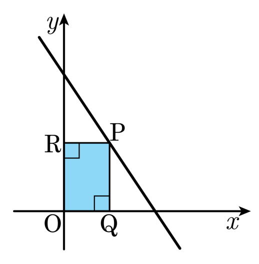
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -3 \ \rightarrow \ x \leq 3 \therefore\ 0 \leq x \leq 3\ (\because\ x \geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

43. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

44. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: ______ 초 후

▷ 정답: 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$45 = 45 + 40x - 5x^2$

$5x^2 - 40x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 8$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.

45. 15% 의 소금물 200g 이 있을 때, 물 xg 을 증발시켜서 30% 이상 60% 이하의 소금물을 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $100 \le x \le 150$

해설

15% 의 소금물 200g 의 소금의 양은 $\frac{15}{100} \times 200 = 30(\text{g})$ 이다.

따라서 물 xg 을 뺐을 때의 농도를 나타내면 $\frac{30}{200-x} \times 100$ 이다.

이 값이 30% 이상 60% 이하 이므로, $30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 30 \le \frac{30}{200-x} \times 100 \\ \frac{30}{200-x} \times 100 \le 60 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \ge 100 \\ x \le 150 \end{cases}$ 이다.

따라서 증발시켜야 하는 물의 양 x 의 범위는 $100 \le x \le 150$ 이다.

46. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p,q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

($a<0$ 이므로) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$ ($\because a<0$)

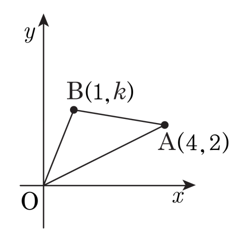
$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

47. 다음 그림과 같이 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(4,2)$, $\mathrm{B}(1,\mathrm{k})$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.

점 $\mathrm{B}(1,\mathrm{k})$ 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리

h 는 $h=\frac{|1\times1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$

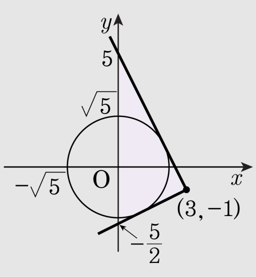
$\therefore\ k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$

48. 점 $(3,\ -1)$ 에서 원 $x^2+y^2=5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

① 33　② 35　③ 45　④ 49　⑤ 55

해설

점 $(3,\ -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을



$y+1=m(x-3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y+1=m(x-3)$,

즉 $mx-y-3m-1=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$\dfrac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면,

$2m^2+3m-2=0$, $(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2}$ 또는 $m=-2$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$, $y=-2x+5$ 이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\dfrac{1}{2}\times\left\{5-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right\}\times 3=\dfrac{45}{4}$ 이다.

$\therefore\ 4S=45$

49. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개　② 3개　③ 4개　④ 5개　⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=k$ 라 하면

$x^2-x+3=k\left(x^2+x+1\right)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-3=0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D\geq 0$ 이다.

$D=(k+1)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

$3k^2-18k+11\leq 0$

$\therefore \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3}\leq k\leq \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times \leq k \leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(i), (ii) 에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.

50. 연립부등식 $2x-3 \leq 4x$, $4x-10 < x+2$ 의 모든 해는 $\dfrac{x+a}{2} > \dfrac{x+2a}{3}$ 를 만족할 때, 상수 a 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -\dfrac{3}{2}$

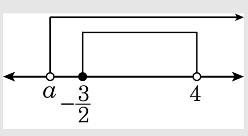
해설

연립부등식 $2x-3 \leq 4x$, $4x-10 < x+2$ 을 풀면

$\therefore\ -\dfrac{3}{2} \leq x < 4$

$\dfrac{x+a}{2} > \dfrac{x+2a}{3}$ 를 정리하면 $x > a$

$-\dfrac{3}{2} \leq x < 4$ 의 모든 해가 $x > a$ 를 만족하려면



위의 그림과 같아야 하므로 $a < -\dfrac{3}{2}$ 이다.