1. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x-1)^2$ ② $y = 2(x-1)^2 + 4$

③ $y = 2(x+1)^2 + 4$ ④ $y = -2(x+1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x-1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x+1)^2 + 4$

2. $x = 0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$ ② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$ ④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(0, -1)$ 이므로 $y = ax^2 - 1$

$(2, -3)$ 을 대입하면 $-3 = 4a - 1$

$a = -\frac{1}{2}$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

3. $x = -1$ 일 때, 최댓값 3 을 갖고 한 점 $(1, -1)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$ ② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$ ④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(-1, 3)$ 이므로 $y = a(x+1)^2 + 3$

$(1, -1)$ 을 대입하면 $-1 = 4a + 3$

$a = -1$

$\therefore y = -(x+1)^2 + 3$

4. 이차함수 $y = -x^2 - 4mx$ 의 최댓값이 16 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.(단, $m > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -x^2 - 4mx = -(x + 2m)^2 + 4m^2$
최댓값이 16 이므로 $4m^2 = 16$
$m > 0$ 이므로 $m = 2$ 이다.

5. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 1 + k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = 2x^2 - 4x + 1 + k = 2(x-1)^2 - 1 + k$
최솟값이 4 이므로 $-1 + k = 4$
$\therefore k = 5$

6. 이차함수 $y = -2x^2 + 2ax$ 의 최댓값이 8일 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2x^2 + 2ax$

$= -2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$

최댓값이 8 이므로 $\frac{a^2}{2} = 8$ 이다.

$a > 0$ 이므로 $a = 4$ 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 + 4x + k$ 의 최솟값이 -4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = x^2 + 4x + k$
$= (x+2)^2 - 4 + k$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $-4 + k$ 를 가지므로
$-4 + k = -4$ $\therefore k = 0$

8. 이차함수 $y = -x^2 + 4x + k - 3$ 의 최댓값이 5 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = -x^2 + 4x + k - 3$
$= -(x-2)^2 + 4 + k - 3$
$= -(x-2)^2 + 1 + k$

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $1 + k$ 를 가지므로 $1 + k = 5$
$\therefore k = 4$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 3$ 이 $x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a - m$ 의 값은?

① -9　② 6　③ 3　④ -3　⑤ -6

해설

$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$

$x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$a = -3, -a^2 + 3 = m,\ m = -6$

$\therefore a - m = -3 - (-6) = 3$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = x^2 + ax + 2$

$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$-\frac{a^2}{4} + 2 = 2$

$\therefore a = 0$

11. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a<0$)

▶ 답:

▷ 정답: $a=-1$

해설

$$y=\frac{1}{2}x^2+4ax$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+8ax)$$
$$=\frac{1}{2}(x+4a)^2-8a^2$$

최솟값 $-8a^2=-8$, $a^2=1$

$\therefore a=-1(\because a<0)$

12. 이차함수 $y = -x^2 + 4x + 2k - 1$ 의 최댓값이 5 일 때, k 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ -1

해설

$y = -x^2 + 4x + 2k - 1$
$= -(x-2)^2 + 4 + 2k - 1$
$= -(x-2)^2 + 2k + 3$

최댓값이 5 이므로 $2k + 3 = 5$
$\therefore\ k = 1$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$
$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$
따라서 m 의 최댓값은 1 이다.

14. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x + a)^2 + 2a^2 + 8a$
$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a + 2)^2 - 8$
따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$

$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$

$= -(a + 1)^2 - 4$

m 의 최댓값 : -4

16. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

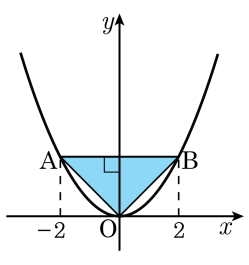
해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2kx + 4k \\ &= (x^2 + 2kx) + 4k \\ &= (x+k)^2 - k^2 + 4k \end{aligned}$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k-2)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값 4 이다.

17. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle AOB$ 의 넓이는 얼마인가?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{AB} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

18. 가로의 길이가 6cm , 세로의 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 $x$cm 길게 하고 세로의 길이를 $x$cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$y = (6+x)(10-x)$

$= -x^2 + 4x + 60$

$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60$

$= -(x-2)^2 + 64$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

19. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 $x$cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8-x)$cm ,
늘어난 세로의 길이는 $(6+2x)$cm 에서

$$\begin{aligned} y &= (8-x)(6+2x) \\ &= 48+10x-2x^2 \\ &= -2\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+48 \\ &= -2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

20. 이차함수 $y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$y = 2x^2 - 8x + 3a - 4$
$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3a - 4$
$= 2(x-2)^2 - 12 + 3a$

$y = 2(x-2)^2 - 12 + 3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로
$8a + 5 = 2(2a-2)^2 - 12 + 3a$
$8a^2 - 21a - 9 = 0,\ (8a+3)(a-3) = 0$
$\therefore a = -\frac{3}{8}$ 또는 3
그런데 최댓값 $-12 + 3a > -5$ 이므로
i) $a = -\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = -12 - \frac{9}{8} = -\frac{105}{8} < -5$$

ii)$a = 3$ 대입 : $-12 + 3 \times 3 = -12 + 9 = -3 > -5$
따라서 $a = 3$ 이다.

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

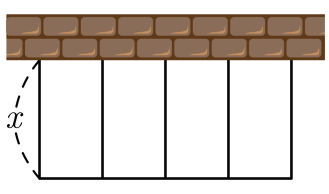
▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

22. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 닭장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 닭장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2 ② 160m^2 ③ 180m^2

④ 200m^2 ⑤ 240m^2

해설

닭장 한 개의 가로의 길이는 $\dfrac{60-5x}{4}$

닭장의 넓이의 합은 $x\left(\dfrac{60-5x}{4}\right)\times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$\therefore -5x^2+60x = -5(x^2-12x+36)+180$

$= -5(x-6)^2+180$

23. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 밑변 : 14

▷ 정답: 높이 : 14

해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28 - x$라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28 - x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 28x + 196 - 196) \\ &= -\frac{1}{2}(x - 14)^2 + 196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14 이다.

24. 둘레의 길이가 32 cm인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답: cm

▷ 정답: 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하면,

$y = x(16 - x)$

$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x)$

$= -(x - 8)^2 + 64$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

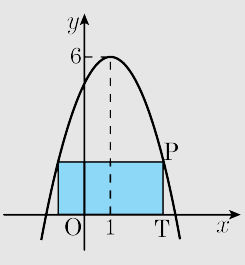
25. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.

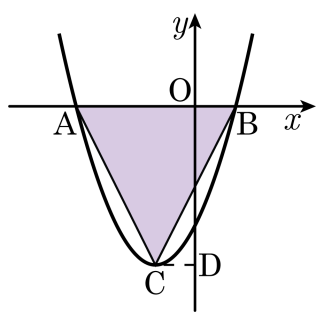


포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1) - t^2 + 2t + 5] \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

26. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
$C(-1, -4)$
$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로
$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$
$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

27. 권당 90000 원인 책을 100 권까지는 정가에 팔고, 101 권부터는 판매량이 1 권씩 증가할 때마다 200 원씩 할인해서 판다고 할 때, 총 판매금액이 최대가 될 때의 권당 판매 가격을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 55000 원

해설

판매량을 x 권이라 하면

(1) $x \le 100$ 일 때

(총 판매 금액) $= 90000 \times x = 90000x$

따라서 $x = 100$ 일 때, 총 판매금액의 최댓값은 9000000 원이다.

(2) $x > 100$ 일 때

(판매가) $= 90000 - 200(x - 100) = 110000 - 200x$

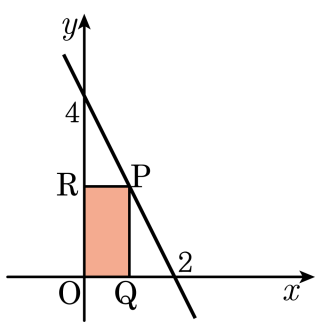
$$\begin{aligned}(\text{총 판매 금액}) &= x(110000 - 200x) \\ &= -200x^2 + 110000x \\ &= -200(x - 275)^2 + 15125000\end{aligned}$$

따라서 판매권수가 $x = 275$ 일 때, 총 판매 금액의 최댓값은 15125000 원이다.

(1), (2)에 의하면 판매량이 275 권일 때, 총 판매금액이 15125000 원이고,

이때의 판매가는 한 권당 55000 원이다.

28. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



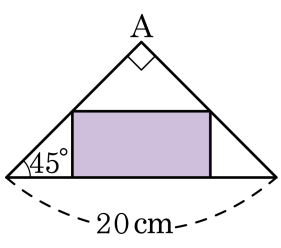
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$y = x(-2x + 4)(0 < x < 2)$
$= -2x^2 + 4x$
$= -2(x^2 - 2x + 1 - 1)$
$= -2(x - 1)^2 + 2$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

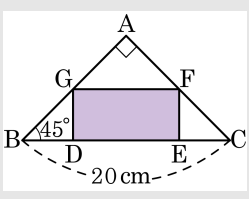
29. 빗변의 길이가 20cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\text{cm}^2}$

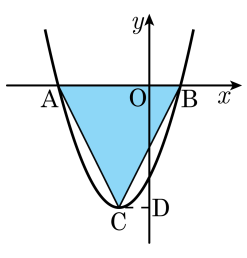
▷ 정답 : $50\,\underline{\text{cm}^2}$

해설



주어진 그림은 직각이등변삼각형이므로
$\overline{BD} = \overline{DG} = \overline{EC} = \overline{EF}$ 이고, $\overline{GD} = x$ 라 하면
$\overline{DE} = 20 - 2x$ 이다. 넓이를 y 로 놓으면
$y = x(20 - 2x)$
$= -2x^2 + 20x$
$= -2(x - 5)^2 + 50$
따라서, 최댓값은 50 이다.

30. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A ,B , 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

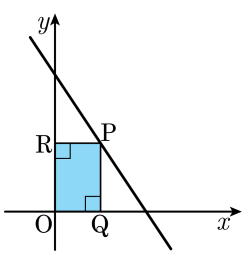
꼭짓점 $C(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

31. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답:

▷ 정답: $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

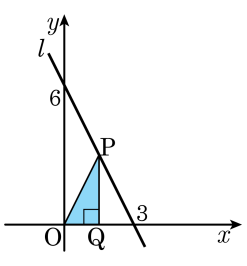
$$\begin{aligned}\square\mathrm{OQPR}=ab&=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)\\&=-\frac{3}{2}a^2+3a\\&=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

32. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle POQ$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y = -2x + 6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b = -2a + 6$

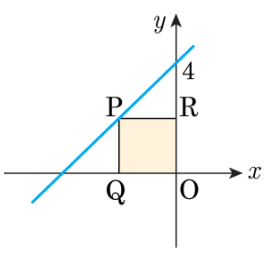
$$\triangle POQ = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(-2a+6)$$
$$= -a^2 + 3a$$
$$= -\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a > 0,\ b = -2a + 6 > 0 \quad \therefore\ 0 < a < 3$

따라서 $\triangle POQ$ 의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

33. 다음 그림과 같이 직선이 $y = x + 4$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 S 라 한다. S 가 최대가 될 때 점 P 의 좌표는?



① $(2, 1)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, 2)$

④ $(-2, -4)$ ⑤ $(4, 2)$

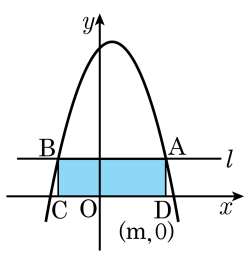
해설

점 P 의 좌표는 $(a, a+4)$ 이고 넓이는 S 이므로

$S = a(a+4) = (a^2 + 4a + 4) - 4 = (a+2)^2 - 4$

$\therefore \mathrm{P}(-2, -2+4) = \mathrm{P}(-2, 2)$

34. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

(□ABCD둘레의 길이)

$= 2\{2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\}$

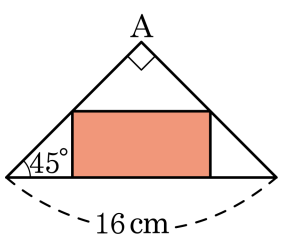
$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$

$= 2(-m^2 + 3m + 5)$

$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

35. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2 ② 20cm^2 ③ 24cm^2

④ 28cm^2 ⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

$y = (16 - 2x)x = 2(-x^2 + 8x)$

$= -2(x^2 - 8x + 16 - 16)$

$= -2(x-4)^2 + 32$

$x = 4$ 일 때 최댓값 32