1. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x-1)^2$ ② $y = 2(x-1)^2 + 4$

③ $y = 2(x+1)^2 + 4$ ④ $y = -2(x+1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x-1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x+1)^2 + 4$

2. $x=0$ 일 때, 최댓값 -1 을 갖고 한 점 $(2,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-2(x+1)^2-4$ ② $y=(x-2)^2-3$

③ $y=-2(x-1)^2+3$ ④ $y=-(x+1)^2+3$

⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

해설

꼭짓점이 $(0,\ -1)$ 이므로 $y=ax^2-1$

$(2,\ -3)$ 을 대입하면 $-3=4a-1$

$a=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x^2-1$

3. $x=-1$ 일 때, 최댓값 3 을 갖고 한 점 $(1,\ -1)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-2(x+1)^2-4$
② $y=(x-2)^2-3$
③ $y=-2(x-1)^2+3$
④ $y=-(x+1)^2+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}x^2-1$

해설

꼭짓점이 $(-1,\ 3)$ 이므로 $y=a(x+1)^2+3$

$(1,\ -1)$ 을 대입하면 $-1=4a+3$

$a=-1$

$\therefore\ y=-(x+1)^2+3$

4. 이차함수 $y = -x^2 - 4mx$ 의 최댓값이 16 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.(단, $m > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -x^2 - 4mx = -(x + 2m)^2 + 4m^2$
최댓값이 16 이므로 $4m^2 = 16$
$m > 0$ 이므로 $m = 2$ 이다.

5. 이차함수 $y=2x^2-4x+1+k$ 의 최솟값이 4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y=2x^2-4x+1+k=2(x-1)^2-1+k$
최솟값이 4 이므로 $-1+k=4$
$\therefore k=5$

6. 이차함수 $y=-2x^2+2ax$ 의 최댓값이 8일 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y=-2x^2+2ax$$
$$=-2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}$$

최댓값이 8 이므로 $\frac{a^2}{2}=8$ 이다.

$a>0$ 이므로 $a=4$ 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 + 4x + k$ 의 최솟값이 -4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + k \\ &= (x+2)^2 - 4 + k \end{aligned}$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $-4 + k$ 를 가지므로

$-4 + k = -4 \qquad \therefore\ k = 0$

8. 이차함수 $y=-x^2+4x+k-3$ 의 최댓값이 5 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2+4x+k-3 \\ &= -(x-2)^2+4+k-3 \\ &= -(x-2)^2+1+k \end{aligned}$$

$x=2$ 일 때, 최댓값 $1+k$ 를 가지므로 $1+k=5$

$\therefore k=4$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 3$ 이 $x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가질 때, $a - m$ 의 값은?

① -9　　② 6　　③ 3　　④ -3　　⑤ -6

해설

$y = x^2 - 2ax + 3 = (x - a)^2 - a^2 + 3$

$x = -3$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$a = -3, -a^2 + 3 = m, \ m = -6$

$\therefore a - m = -3 - (-6) = 3$

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 + ax + 2$

$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$

$-\frac{a^2}{4} + 2 = 2$

$\therefore a = 0$

11. 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-1$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2+4ax \\ &= \frac{1}{2}(x^2+8ax) \\ &= \frac{1}{2}(x+4a)^2-8a^2 \end{aligned}$$

최솟값 $-8a^2=-8,\ a^2=1$

$\therefore a=-1(\because a<0)$

12. 이차함수 $y = -x^2 + 4x + 2k - 1$ 의 최댓값이 5 일 때, k 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ $\frac{3}{4}$　　⑤ -1

해설

$$y = -x^2 + 4x + 2k - 1$$
$$= -(x-2)^2 + 4 + 2k - 1$$
$$= -(x-2)^2 + 2k + 3$$

최댓값이 5 이므로 $2k + 3 = 5$

$\therefore\ k = 1$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$

$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$

따라서 m 의 최댓값은 1 이다.

14. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x + a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a + 2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$$
$$= (x-a)^2 - a^2 - 2a - 5$$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$

$$= -(a+1)^2 - 4$$

m 의 최댓값 : -4

16. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

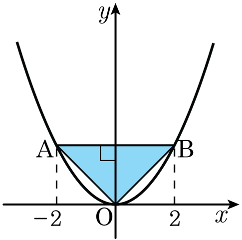
해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2kx + 4k \\ &= (x^2 + 2kx) + 4k \\ &= (x+k)^2 - k^2 + 4k \end{aligned}$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k-2)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값 4이다.

17. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle$AOB 의 넓이는 얼마인가?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{AB}}=4$ 이고,

$x=2$ 를 대입하면 $y=2$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$

18. 가로의 길이가 6cm , 세로의 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 $x$cm 길게 하고 세로의 길이를 $x$cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= (6+x)(10-x) \\ &= -x^2+4x+60 \\ &= -(x^2-4x+4-4)+60 \\ &= -(x-2)^2+64 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

19. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 $x$cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8-x)$cm ,
늘어난 세로의 길이는 $(6+2x)$cm 에서

$$\begin{aligned} y &= (8-x)(6+2x) \\ &= 48 + 10x - 2x^2 \\ &= -2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 48 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{121}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

20. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5 보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)\ a=-\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii) a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

따라서 $a=3$ 이다.

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$

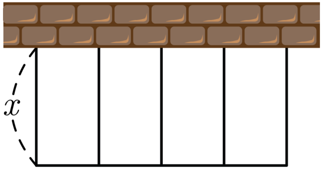
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$

$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서

$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$

따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

22. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 닭장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 닭장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2　② 160m^2　③ 180m^2　④ 200m^2　⑤ 240m^2

해설

닭장 한 개의 가로의 길이는 $\dfrac{60-5x}{4}$

닭장의 넓이의 합은 $x\left(\dfrac{60-5x}{4}\right)\times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$$\therefore -5x^2+60x = -5(x^2-12x+36)+180$$
$$= -5(x-6)^2+180$$

23. 밑면의 길이와 높이의 합이 28 인 삼각형의 넓이가 최대가 될 때 밑변과 높이의 길이를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 밑변 : 14

▷ 정답 : 높이 : 14

해설

삼각형의 넓이를 y 라 하면, 밑변을 x , 높이는 $28-x$라 두면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2+14x \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-28x+196-196) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2+196 \end{aligned}$$

따라서 밑변은 14 , 높이는 14 이다.

24. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(16-x) \\ &= -x^2+16x \\ &= -(x^2-16x) \\ &= -(x-8)^2+64 \end{aligned}$$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

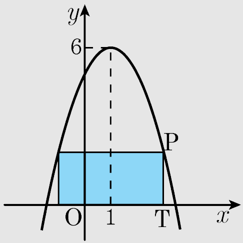
25. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.

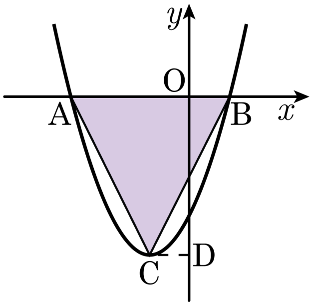
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1)-t^2+2t+5] \\ &= 2(-t^2+4t+3) \\ &= -2t^2+8t+6 \\ &= -2(t-2)^2+14\end{aligned}$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

26. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$\mathrm{C}(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

$\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$

$\therefore \triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

27. 권당 90000 원인 책을 100 권까지는 정가에 팔고, 101 권부터는 판매량이 1 권씩 증가할 때마다 200 원씩 할인해서 판다고 할 때, 총 판매 금액이 최대가 될 때의 권당 판매 가격을 구하여라.

▶ 답 : ______ 원

▷ 정답 : 55000 원

해설

판매량을 x 권이라 하면

(1) $x \le 100$ 일 때

(총 판매 금액) $= 90000 \times x = 90000x$

따라서 $x = 100$ 일 때, 총 판매금액의 최댓값은 9000000 원이다.

(2) $x > 100$ 일 때

(판매가) $= 90000 - 200(x - 100) = 110000 - 200x$

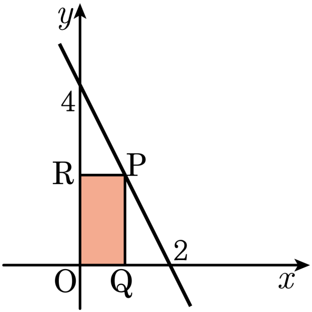
$$\begin{aligned}(\text{총 판매 금액}) &= x(110000 - 200x)\\ &= -200x^2 + 110000x\\ &= -200(x - 275)^2 + 15125000\end{aligned}$$

따라서 판매권수가 $x = 275$ 일 때, 총 판매 금액의 최댓값은 15125000 원이다.

(1), (2)에 의하면 판매량이 275 권일 때, 총 판매금액이 15125000 원이고,

이때의 판매가는 한 권당 55000 원이다.

28. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



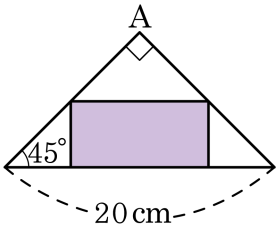
① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x+4)(0 < x < 2) \\ &= -2x^2 + 4x \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -2(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$x = 1$ 일 때 최댓값 2

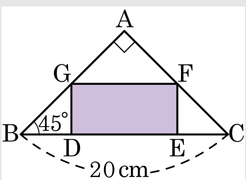
29. 빗변의 길이가 20cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 이 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ **답 :** $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\text{cm}^2}$

▷ **정답 :** $50\,\underline{\text{cm}^2}$

해설



주어진 그림은 직각이등변삼각형이므로

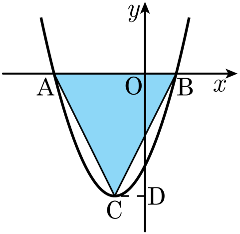
$\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{DG}} = \overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{EF}}$ 이고, $\overline{\mathrm{GD}} = x$ 라 하면

$\overline{\mathrm{DE}} = 20 - 2x$ 이다. 넓이를 y 로 놓으면

$$
\begin{aligned}
y &= x(20 - 2x) \\
&= -2x^2 + 20x \\
&= -2(x - 5)^2 + 50
\end{aligned}
$$

따라서, 최댓값은 50 이다.

30. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A ,B , 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?



① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

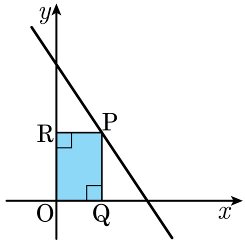
꼭짓점 C$(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

31. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

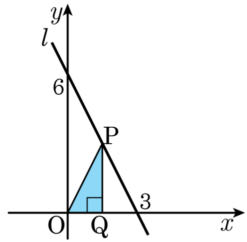
$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

32. 다음 그림과 같이 직선 l 위를 움직이는 점 P 가 있다. x 축 위에 내린 수선의 발을 Q 라고 할 때, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

직선 l 은 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ 을 지나므로

$y=-2x+6$

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-2a+6$

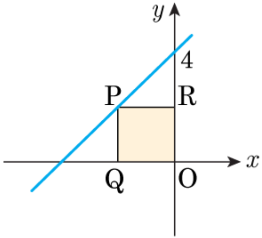
$$\begin{aligned}\triangle\text{POQ} = \frac{1}{2}ab &= \frac{1}{2}a(-2a+6)\\ &= -a^2+3a\\ &= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-2a+6>0 \qquad \therefore\ 0<a<3$

따라서 $\triangle$POQ 의 넓이는 $a=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

33. 다음 그림과 같이 직선이 $y=x+4$ 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 S 라 한다. S 가 최대가 될 때 점 P 의 좌표는?



① $(2,1)$ ② $(2,4)$ ③ $(-2,2)$

④ $(-2,-4)$ ⑤ $(4,2)$

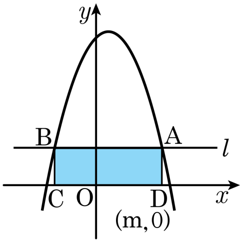
해설

점 P 의 좌표는 $(a, a+4)$ 이고 넓이는 S 이므로

$S=a(a+4)=(a^2+4a+4)-4=(a+2)^2-4$

$\therefore \mathrm{P}(-2,-2+4)=\mathrm{P}(-2,2)$

34. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2} < m < 3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

(□ABCD둘레의 길이)

$= 2\left\{2\left(\mathrm{m} - \frac{1}{2}\right) - \mathrm{m}^2 + \mathrm{m} + 6\right\}$

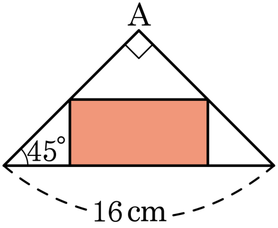
$= 2(2\mathrm{m} - 1 - \mathrm{m}^2 + \mathrm{m} + 6)$

$= 2(-\mathrm{m}^2 + 3\mathrm{m} + 5)$

$= -2\left(\mathrm{m} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

35. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2 ② 20cm^2 ③ 24cm^2

④ 28cm^2 ⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

$$y = (16-2x)x = 2(-x^2+8x)$$
$$= -2(x^2-8x+16-16)$$
$$= -2(x-4)^2+32$$

$x = 4$ 일 때 최댓값 32