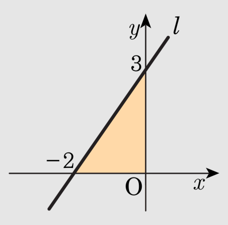
1. 직선 $3x-2y+6=0$이 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



∴ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times2\times3=3$

2. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 두 직선과 x 축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-3y+4=0$　　② $2x+3y+4=0$

③ $2x-3y-4=0$　　④ $x-3y+4=0$

⑤ $-x-3y+4=0$

해설

두 직선 $x-y+1=0\cdots$①

$x-2y+3=0\cdots$② 의 교점을 지나는 직선을 l 이라고 하면,

직선 l 은 $l:(x-y+1)\cdot m+(x-2y+3)=0\cdots$③ 의 꼴로 나타낼 수 있다.

한편, 직선 ① 의 x 절편은 -1,

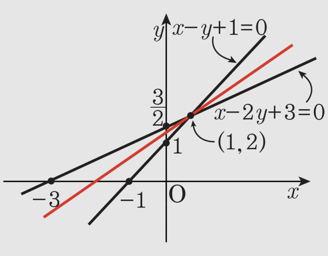
직선 ② 의 x 절편은 -3 이므로

l 이 삼각형의 넓이를 이등분하려면, 점 $(-2,0)$ 을 지나야 한다.

점 $(-2,0)$ 을 ③ 에 대입하면 $-m+1=0$

$\therefore m=1$

따라서, l 의 방정식은 $2x-3y+4=0$



3. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다 ② 1 개 ③ 2 개

④ 4개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$(x+y-1)(x-y-1) = 0$

$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$

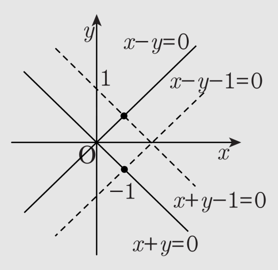
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는

두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$

위의 점이므로 다음 그림에서

교점의 개수는 2 개



4. 세 직선 $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m : x + 2y - 2 = 0$, $n : 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.

ㄴ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.

ㄷ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$l : y = -\frac{1}{2}x + 4$

$m : x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$

$n : 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$

ㄱ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고 y 절편은 다르므로 평행하다. (참)

ㄴ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

ㄷ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은 $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

6. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$　② $x+y+1=0$　③ $x-y-1=0$
④ $x-y+2=0$　⑤ $x+y+2=0$

해설
두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-4+k(x-2y+3)=0 \cdots$ ㉠
이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$
$\therefore\ k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

7. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4　　② 8　　③ $3\sqrt{2}$　　④ 4　　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

8. 복소수 $z = a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원 ② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

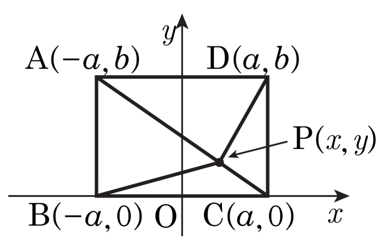
$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$
$= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots$ ㉠

㉠이 실수이려면 $2b = 3a$

$\therefore\ b = \dfrac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

9. 다음은 직사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$ 이 성립함을 보인 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말 중 옳지 않은 것은?

> 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 변 BC를 x축, $\overline{\mathrm{BC}}$의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면
> A $(-a,b)$, B $(-a,0)$, C $(a,0)$, D (a,b)로 놓을 수 있다.
>
> 
>
>
> 이때, 점 P의 좌표를 P (x,y) 라고 하면
> $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=$ (가) + (나)
> $=2\left(x^2+y^2+a^2-by\right)+b^2\cdots$ ㉠
> $\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2=$ (다) + (라)
> $=2\left(x^2+y^2+a^2-by\right)+b^2\cdots$ ㉡
> ㉠, ㉡로부터 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=$ (마)

① (가) : $(x+a)^2+(y+b)^2$
② (나) : $(x-a)^2+y^2$
③ (다) : $(x+a)^2+y^2$
④ (라) : $(x-a)^2+(y-b)^2$
⑤ (마) : $\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$

해설

A $(-a,b)$, B $(-a,0)$, C $(a,0)$, D (a,b) , P (x,y) 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+a)^2+(y-b)^2\cdots$(가)

$\overline{\mathrm{CP}}^2=(x-a)^2+y^2\cdots$(나)

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x+a)^2+y^2\cdots$(다)

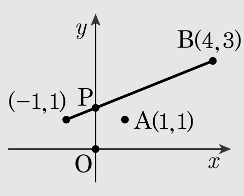
$\overline{\mathrm{DP}}^2=(x-a)^2+(y-b)^2\cdots$(라)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2\cdots$(마)

10. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)가 있을 때, y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되도록 점 P의 y좌표를 구하면?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설



구하는 거리의 합의 최솟값은 한 점을 y축에 대칭이동한 점과 다른 점 사이의 거리와 같다. (−1, 1)과 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, y절편을 찾는다.

$y-3=\frac{3-1}{4-(-1)}(x-4)$, $y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}+3$

$y=\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$

P의 y좌표는 $\frac{7}{5}$

11. 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(2,-1)$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{8}{3}$　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{12}{3}$　④ $\frac{14}{3}$　⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a,b)가 $y=x$ 위에 있으므로 $b=a$

$\sqrt{(a-1)^2+(a-6)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2}$

$(a-1)^2+(a-6)^2=(a-2)^2+(a+1)^2$

$-2a+1-12a+36=-4a+4+2a+1$

$-12a=-32$

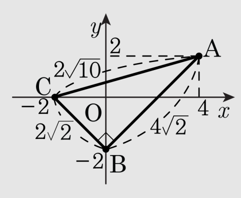
$\therefore\ a=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=a+a=\frac{8}{3}\times 2=\frac{16}{3}$

12. 세 점 $A(4,\ 2)$, $B(0,\ -2)$, $C(-2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설



$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면
$\overline{AB}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} =$
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

13. $\triangle ABC$에서 $A(6,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

외심을 $P(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \iff (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \iff (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a - b - 16 = 0,\ 2a - b - 6 = 0$

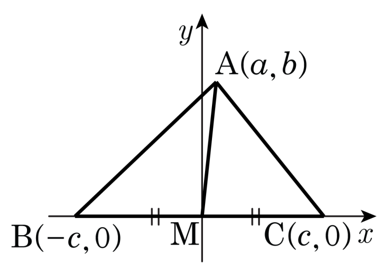
연립하여 풀면 $a = 2,\ b = -2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{PA} = 5$

14. $\triangle$ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}^2}+\overline{\mathrm{AC}^2}=2(\overline{\mathrm{AM}^2}+\overline{\mathrm{BM}^2})$ 이 성립함을 보이는 것이다. ㈎, ㈏, ㈐에 들어갈 말을 차례로 나열한 것은?



다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 x 축 위에 놓고
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 M 을 y 축이 지난다고 가정하면
M 은 원점이 된다.
또, $\overline{\mathrm{AB}^2}=$ ㈎, $\overline{\mathrm{AC}^2}=$ ㈏
$\overline{\mathrm{AB}^2}+\overline{\mathrm{AC}^2}=$ ㈎ $+$ ㈏
$=2(a^2+b^2+c^2)$
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$ ㈐
따라서 $\overline{\mathrm{AB}^2}+\overline{\mathrm{AC}^2}=2(\overline{\mathrm{AM}^2}+\overline{\mathrm{BM}^2})$

① $a+b+c$, $a+b-c$, $a+b+c$

② $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a+b+c$

③ $a+b+c$, $a+b-c$, $a^2+b^2+c^2$

④ $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

⑤ $2(a+c)^2+b^2$, $2(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

해설

㈎ $=(a+c)^2+b^2$
㈏ $=(a-c)^2+b^2$
㈐ $=a^2+b^2+c^2$

15. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(5, -5)$가 있다. 점 $\mathrm{C}(3, m)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 최소일 때, m의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$가 최소가 되기 위해서
점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$는 한 직선 위에 있어야 한다.
따라서 A와 B를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=-2x+5$
이다.
C는 이 직선 위의 점이므로 대입하면 m은 -1

16. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： m

▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

17. 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB를 $1:2$ 로 내분하는 점이 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $1:2$ 로 외분하는 점이 $\mathrm{Q}(-2,\ 7)$ 일때, 선분 AB 의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{A}(a,b), \mathrm{B}(c,d)$ 라고 하면

선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점은

$$\mathrm{P}\left(\frac{c+2a}{1+2}, \frac{d+2b}{1+2}\right) = \mathrm{P}(2,3)$$

$\therefore\ 2a+c=6, 2b+d=9$

$1:2$ 로 외분하는 점은

$$\mathrm{Q}\left(\frac{c-2a}{1-2}, \frac{d-2b}{1-2}\right) = \mathrm{Q}(-2,\ 7)$$

$\therefore\ 2a-c=-2, 2b-d=7$

따라서 $a=1, b=4, c=4, d=1$

$\therefore\ \mathrm{A}=(1,4), \mathrm{B}(4,1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2} = 3\sqrt{2}$

18. 세 꼭짓점이 모두 제 1사분면에 있는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이라고 한다. 세 꼭짓점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 할 때, $\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}$의 값을 구하면?

① $a+b$ ② $\frac{a+b}{3}$ ③ $\frac{1}{3}b$ ④ $3b$ ⑤ $6b$

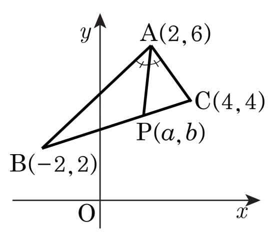
해설

$\overline{AH_1}+\overline{BH_2}+\overline{CH_3}$의 값은 꼭짓점 A, B, C의 y 좌표의 합과 같으므로,
세 꼭짓점의 y좌표를 y_1, y_2, y_3라 하자.
무게중심의 공식을 이용하면,

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=b$$

$\therefore\ y_1+y_2+y_3=3b$

19. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(−2, 2), C(4, 4) 를 꼭짓점으로 하는 △ABC 에서 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



① 10 ② 15 ③ 20

④ 25 ⑤ 30

해설

△ABC 에서 ∠A 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 하면
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 P(a, b) 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.

$$\therefore a = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2+1} = 2,$$

$$b = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2+1} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ 3ab = 3 \cdot 2 \cdot \frac{10}{3} = 20$$

20. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$
② $3x+2y=0$
③ $6x-4y+9=0$
④ $-3x+2y=0$
⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$라 하면
$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서
$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$
정리하면 $-6x+4y=0$
$\therefore -3x+2y=0$

21. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$

$+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$

$+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$

$+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$

$= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$

$= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$

$= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$

따라서 $x = 3$, $y = -2$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

22. 두 점 A(a, 3), B(4, 5) 를 잇는 선분 AB의 수직이등분선의 방정식이 $y=-x+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

ⅰ) 수직이등분선의 기울기는 선분 $\overline{AB}$ 의 기울기에 수직한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{5-3}{4-a}\times -1=-1 \quad \therefore\ a=2$

ⅱ) $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{3+5}{2}=-\dfrac{4+2}{2}+b \quad \therefore\ b=7$

$\therefore\ a+b=9$

23. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6, -5)$ ② $(5, -6)$ ③ $(4, -3)$
④ $(5, -4)$ ⑤ $(-3, 6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$
$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$
k에 관계없이 일정한 점을 지나려면
$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$
연립하면 $x=6, \ y=-5$
$\therefore$ 일정한 점은 $(6, -5)$

24. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$$3x-y-6=0\ ,\quad 3x-y+k=0$$

▶ 답:

▷ 정답 : $k=4$

해설

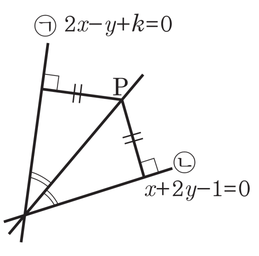
직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k는 양수)

25. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 P(3, 1)을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① −2　　② 4　　③ −6

④ 8　　⑤ −10

해설

$2x-y+k=0 \ \cdots$ ㉠

$x+2y-1=0 \ \cdots$ ㉡

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

26. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$
④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설
$x=a\cdots$㉠
$y=a+b\cdots$㉡ 에서
a, b 를 소거한다.
점 (a, b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를
움직이므로 $2a-b-2=0$
$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면
$y=3a-2$
$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)

27. $\triangle$ABC에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로
$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$
$\therefore\ x = \pm 6$
$x > 0$이므로 $x = 6$

28. 두 점 A(2, 3), B(0, −1)를 이은 선분 AB, 또는 그연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 1 : 1 내분점이거나 3 : 1 외분점이다.

i) 1 : 1 내분점은 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

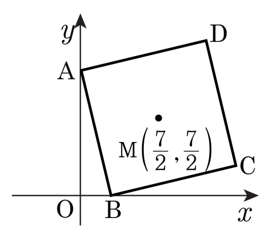
ii) 3 : 1 외분점은

$\left(\frac{3\times 0 - 1\times 2}{3-1}, \frac{3\times(-1) - 1\times 3}{3-1}\right) = (-1, -3)$

i), ii) 사이 거리는

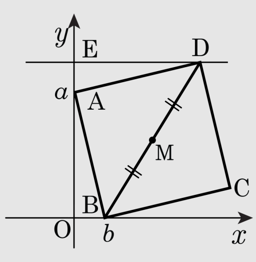
$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

29. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, △OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설



다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 $A(0, a), B(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서

x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \equiv \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 $D(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$

즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로

△OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$$

30. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 $(5, 6)$이고 무게중심 G의 좌표가 $(3, 4)$일 때, 변 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는?

① $(1,\ 2)$　　② $(2,\ 5)$　　③ $(2,\ 3)$

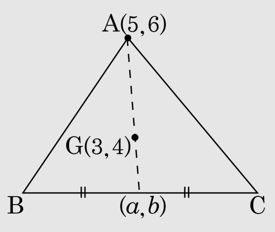
④ $(3,\ 4)$　　⑤ $(4,\ 5)$

해설

무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore\ \mathrm{G}\left(\dfrac{2a+5}{2+1},\ \dfrac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3$



31. $\triangle$ABC 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\frac{a_3+a_1}{2},\ \frac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

$\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G=\left(\frac{-2-6+5}{3},\ \frac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$

$\therefore$ 2

32. 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2(-1\le x\le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b,a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로
$b=3a+2$(단, $-1\le a\le 2$) $\cdots$ ㉠
이 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b,a-b)$에서
$a+b=X$, $a-b=Y$로 놓고
a,b를 X,Y로 나타내면
$a=\dfrac{X+Y}{2}$, $b=\dfrac{X-Y}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{X-Y}{2}=\dfrac{3X+3Y}{2}+2$
$\therefore X+2Y+2=0$
한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고
$-1\le a\le 2$이므로 $-2\le 4a+2\le 10$
$\therefore -2\le X\le 10$
따라서 점 $\mathrm{Q}(x,y)$는
직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2\le x\le 10$) 위를 움직인다.
그런데 $x=-2$일 때, $y=0$
$x=10$일 때, $y=-6$이므로
구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0)$, $(10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.
$\therefore \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

33. 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4\cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $2:1$ 로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \dfrac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3},\ \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore\ a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{9}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

34. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는
$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

35. 원점과 직선 $2x-y-5+k(x+2y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\dfrac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{5}$　　② $\dfrac{2}{5}$　　③ $\dfrac{3}{5}$　　④ $\dfrac{4}{5}$　　⑤ 1

해설

점 $P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

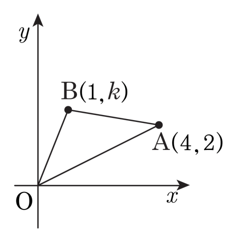
원점과 직선$(2+k)x+(2k-1)y-5=0$ 사이의 거리

$f(k)$ 는 $f(k)=\dfrac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2+(2k-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$

$\therefore\ \dfrac{1}{\{f(k)\}^2}=\dfrac{k^2+1}{5}$

따라서, $k=0$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{1}{\{f(0)\}^2}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

36. 다음 그림과 같이 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(4,2)$, $\mathrm{B}(1,\mathrm{k})$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.
점 $\mathrm{B}(1,\mathrm{k})$ 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리
h 는 $h=\frac{|1\times 1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$
$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$
$\therefore\ k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$