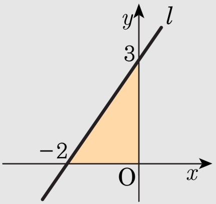
1. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$

2. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$의 교점을 지나고, 두 직선과 x축이 이루는 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식을 구하면?

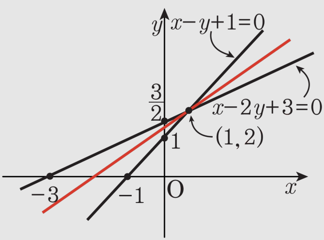
① $2x-3y+4=0$　　② $2x+3y+4=0$

③ $2x-3y-4=0$　　④ $x-3y+4=0$

⑤ $-x-3y+4=0$

해설

두 직선 $x-y+1=0\cdots$①
$x-2y+3=0\cdots$②의 교점을 지나는 직선을 l 이라고 하면,
직선 l 은 $l:(x-y+1)\cdot m+(x-2y+3)=0\cdots$③의 꼴로 나타낼 수 있다.
한편, 직선 ①의 x 절편은 -1,
직선 ②의 x 절편은 -3 이므로
l 이 삼각형의 넓이를 이등분하려면, 점 $(-2,0)$ 을 지나야 한다.
점 $(-2,0)$ 을 ③에 대입하면 $-m+1=0$
$\therefore m=1$
따라서, l 의 방정식은 $2x-3y+4=0$



3. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다　　② 1 개　　③ 2 개

④ 4개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ 또는 $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$(x+y-1)(x-y-1) = 0$

$\therefore x + y - 1 = 0$ 또는 $x - y - 1 = 0$

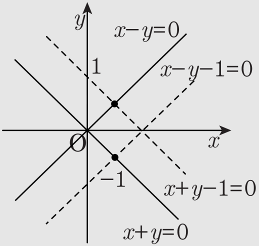
따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는

두 직선 $x + y = 0$, $x - y = 0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 는 두 직선 $x + y - 1 = 0$, $x - y = 0$

위의 점이므로 다음 그림에서

교점의 개수는 2 개



4. 세 직선 $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m : x + 2y - 2 = 0$, $n : 2x - y + 4 = 0$ 에 대한 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ 두 직선 l 과 m 은 평행하다.

㉡ 두 직선 m 과 n 은 수직이다.

㉢ 두 직선 l 과 n 은 수직이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$l : y = -\frac{1}{2}x + 4$

$m : x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$

$n : 2x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4$

㉠ 두 직선 l 과 m 은 기울기는 같고
y 절편은 다르므로 평행하다. (참)

㉡ 두 직선 m 과 n 의 기울기의 곱은
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

㉢ 두 직선 l 과 n 의 기울기의 곱은
$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ 이므로 수직이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

5. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　　② 1　　③ 0　　④ -1　　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

6. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+y+1=0$ ③ $x-y-1=0$

④ $x-y+2=0$ ⑤ $x+y+2=0$

해설

두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-4+k(x-2y+3)=0\cdots$㉠
이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$
$\therefore\ k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

7. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4 ② 8 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow 2(a^2+b^2)=16$$

$$\therefore\ a^2+b^2=8$$

8. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

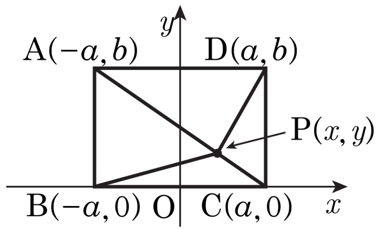
$$(2-3i)z=(2-3i)(a+bi)$$
$$=(2a+3b)+(2b-3a)i\cdots㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

9. 다음은 직사각형 ABCD 와 임의의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$ 이 성립함을 보인 것이다. (가) ~ (마)에 들어갈 말 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

> 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 의 한 변 BC를 x축, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면
> $\mathrm{A}\,(-a,b)$, $\mathrm{B}\,(-a,0)$, $\mathrm{C}\,(a,0)$, $\mathrm{D}\,(a,b)$ 로 놓을 수 있다.
>
> 
>
>
> 이때, 점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}\,(x,y)$ 라고 하면
> $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=$ (가) + (나)
> $=2\left(x^2+y^2+a^2-by\right)+b^2\cdots$ ㉠
> $\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2=$ (다) + (라)
> $=2\left(x^2+y^2+a^2-by\right)+b^2\cdots$ ㉡
> ㉠, ㉡로부터 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=$ (마)

① (가) : $(x+a)^2+(y+b)^2$
② (나) : $(x-a)^2+y^2$
③ (다) : $(x+a)^2+y^2$
④ (라) : $(x-a)^2+(y-b)^2$
⑤ (마) : $\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2$

해설

$\mathrm{A}\,(-a,b)$, $\mathrm{B}\,(-a,0)$, $\mathrm{C}\,(a,0)$, $\mathrm{D}\,(a,b)$, $\mathrm{P}\,(x,y)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+a)^2+(y-b)^2\cdots$ (가)

$\overline{\mathrm{CP}}^2=(x-a)^2+y^2\cdots$ (나)

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x+a)^2+y^2\cdots$ (다)

$\overline{\mathrm{DP}}^2=(x-a)^2+(y-b)^2\cdots$ (라)

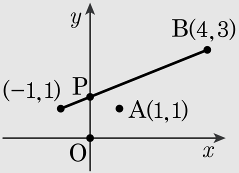
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{DP}}^2\cdots$ (마)

10. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)가 있을 때, y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되도록 점 P의 y좌표를 구하면?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

구하는 거리의 합의 최솟값은 한 점을 y축에 대칭이동한 점과 다른 점 사이의 거리와 같다. (−1, 1)과 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, y절편을 찾는다.



$$y-3=\frac{3-1}{4-(-1)}(x-4),\ y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}+3$$

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$$

P의 y좌표는 $\frac{7}{5}$

11. 직선 $y=x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(2,-1)$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a,b)가 $y=x$ 위에 있으므로 $b=a$

$\sqrt{(a-1)^2+(a-6)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2}$

$(a-1)^2+(a-6)^2=(a-2)^2+(a+1)^2$

$-2a+1-12a+36=-4a+4+2a+1$

$-12a=-32$

$\therefore\ a=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=a+a=\frac{8}{3}\times 2=\frac{16}{3}$

12. 세 점 $A(4,\ 2)$, $B(0,\ -2)$, $C(-2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

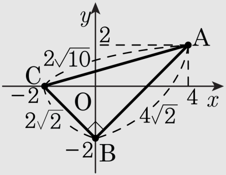
① 정삼각형 ② 둔각삼각형

③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설

$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면



$\overline{AB}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

13. $\triangle ABC$에서 $A(6,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $P(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$
$\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

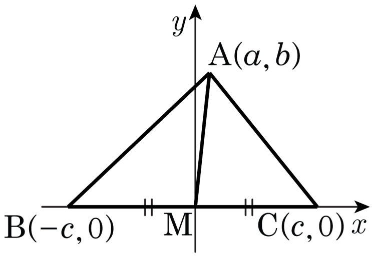
연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{PA} = 5$

14. $\triangle$ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB^2}+\overline{AC^2}=2(\overline{AM^2}+\overline{BM^2})$ 이 성립함을 보이는 것이다. (가), (나), (다)에 들어갈 말을 차례로 나열한 것은?



다음 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 x 축 위에 놓고
$\overline{BC}$ 의 중점 M 을 y 축이 지난다고 가정하면
M 은 원점이 된다.
또, $\overline{AB^2}=$ (가), $\overline{AC^2}=$ (나)
$\overline{AB^2}+\overline{AC^2}=$ (가) $+$ (나)
$=2(a^2+b^2+c^2)$
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=$ (다)
따라서 $\overline{AB^2}+\overline{AC^2}=2(\overline{AM^2}+\overline{BM^2})$

① $a+b+c$, $a+b-c$, $a+b+c$

② $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a+b+c$

③ $a+b+c$, $a+b-c$, $a^2+b^2+c^2$

④ $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

⑤ $2(a+c)^2+b^2$, $2(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

해설

(가) $=(a+c)^2+b^2$
(나) $=(a-c)^2+b^2$
(다) $=a^2+b^2+c^2$

15. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 3)$, $B(5, -5)$가 있다. 점 $C(3, m)$에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$가 최소일 때, m의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$가 최소가 되기 위해서
점 A, B, C는 한 직선 위에 있어야 한다.
따라서 A와 B를 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = -2x + 5$
이다.
C는 이 직선 위의 점이므로 대입하면 m은 -1

16. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

17. 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB를 $1:2$ 로 내분하는 점이 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $1:2$ 로 외분하는 점이 $\mathrm{Q}(-2,\ 7)$ 일때, 선분 AB 의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{A}(a, b), \mathrm{B}(c, d)$ 라고 하면
선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점은

$$\mathrm{P}\left(\frac{c+2a}{1+2}, \frac{d+2b}{1+2}\right) = \mathrm{P}(2, 3)$$

$\therefore\ 2a + c = 6, 2b + d = 9$
$1:2$ 로 외분하는 점은

$$\mathrm{Q}\left(\frac{c-2a}{1-2}, \frac{d-2b}{1-2}\right) = \mathrm{Q}(-2,\ 7)$$

$\therefore\ 2a - c = -2, 2b - d = 7$
따라서 $a = 1, b = 4, c = 4, d = 1$
$\therefore\ \mathrm{A} = (1, 4), \mathrm{B}(4, 1)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$

18. 세 꼭짓점이 모두 제 1사분면에 있는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이라고 한다. 세 꼭짓점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, $\mathrm{H_3}$이라 할 때, $\overline{\mathrm{AH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}+\overline{\mathrm{CH_3}}$의 값을 구하면?

① $a+b$ ② $\dfrac{a+b}{3}$ ③ $\dfrac{1}{3}b$ ④ $3b$ ⑤ $6b$

해설

$\overline{\mathrm{AH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}+\overline{\mathrm{CH_3}}$의 값은 꼭짓점 A, B, C의 y 좌표의 합과 같으므로,

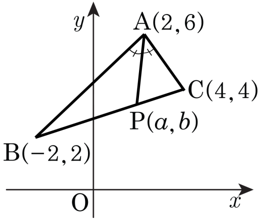
세 꼭짓점의 y좌표를 y_1, y_2, y_3라 하자.

무게중심의 공식을 이용하면,

$$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=b$$

$$\therefore\ y_1+y_2+y_3=3b$$

19. 다음 그림과 같이 세 점 $A(2,\ 6)$, $B(-2,\ 2)$, $C(4,\ 4)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $P(a,\ b)$ 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



① 10 ② 15 ③ 20

④ 25 ⑤ 30

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 $P(a,\ b)$ 라 하면
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 $P(a,\ b)$ 는 변 BC 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다.

$$\therefore a = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot(-2)}{2+1} = 2,$$

$$b = \frac{2\cdot 4 + 1\cdot 2}{2+1} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore\ 3ab = 3\cdot 2\cdot \frac{10}{3} = 20$$

20. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x+2y+9=0$

② $3x+2y=0$

③ $6x-4y+9=0$

④ $-3x+2y=0$

⑤ $-6x+4y-5=0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$라 하면

$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서

$(x-3)^2+y^2-\{x^2+(y-2)^2\}=5$

정리하면 $-6x+4y=0$

$\therefore -3x+2y=0$

21. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46　② 45　③ 44　④ 43　⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$$
$$=\left\{(x+1)^2+(y+4)^2\right\}$$
$$+\left\{(x-3)^2+(y+3)^2\right\}$$
$$+\left\{(x-7)^2+(y-1)^2\right\}$$
$$=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9$$
$$+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1$$
$$=3x^2-18x+3y^2+12y+85$$
$$=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46$$
$$=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46$$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

22. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$ 를 잇는 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식이 $y=-x+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

ⅰ) 수직이등분선의 기울기는 선분 $\overline{AB}$ 의 기울기에 수직한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{5-3}{4-a}\times -1=-1 \quad \therefore\ a=2$$

ⅱ) $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

$$\Rightarrow \quad \frac{3+5}{2}=-\frac{4+2}{2}+b \quad \therefore\ b=7$$

$$\therefore\ a+b=9$$

23. 직선 $(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$은 실수 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지날 때, 그 점의 좌표를 구하면?

① $(6,-5)$　② $(5,-6)$　③ $(4,-3)$
④ $(5,-4)$　⑤ $(-3,6)$

해설

$(k-2)x+(2k-3)y+4k-3=0$

$\Rightarrow \quad (x+2y+4)k-(2x+3y+3)=0$

k에 관계없이 일정한 점을 지나려면

$x+2y+4=0, \quad 2x+3y+3=0$

연립하면 $x=6, \ y=-5$

$\therefore$ 일정한 점은 $(6,-5)$

24. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$$3x-y-6=0\ ,\qquad 3x-y+k=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

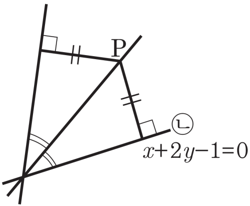
직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

25. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6

④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots ㉠$

$x+2y-1=0 \quad \cdots ㉡$

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리)이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

$\therefore k$ 의 합 : -10

26. 점 $(a,\ b)$가 직선 $2x-y-2=0$ 위를 움직일 때, 점 $(a,\ a+b)$의 자취의 방정식은?

① $y=3x-2$ ② $y=4x-3$ ③ $y=5x-4$

④ $y=6x-5$ ⑤ $y=7x-6$

해설

$x=a\cdots$㉠

$y=a+b\cdots$㉡ 에서

a,b 를 소거한다.

점 (a,b)가 직선 $2x-y-2=0$ 위를

움직이므로 $2a-b-2=0$

$\therefore b=2a-2$ 이것을 ㉡에 대입하면

$y=3a-2$

$\therefore y=3x-2$ ($\because$ ㉠)

27. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=x$이고, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{BM}}=7$, $\overline{\mathrm{AM}}=1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=6$

해설

파포스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$이므로
$8^2+x^2=2(7^2+1^2)$
$\therefore\ x=\pm6$
$x>0$이므로 $x=6$

28. 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -1)$를 이은 선분 AB, 또는 그연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 $1:1$ 내분점이거나 $3:1$ 외분점이다.

i) $1:1$ 내분점은 $\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

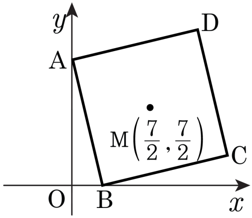
ii) $3:1$ 외분점은

$$\left(\frac{3\times 0 - 1\times 2}{3-1}, \frac{3\times(-1) - 1\times 3}{3-1}\right) = (-1,\ -3)$$

i), ii) 사이 거리는

$$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

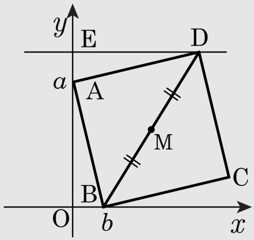
29. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, $\triangle$OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 A$(0, a)$, B$(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서
x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \equiv \triangle EDA$
따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$
이므로 D$(a, a+b)$
이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로
M$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$
즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$



또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로 $\triangle$OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - \left(a^2+b^2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$$

30. $\triangle$ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5, 6)$ 이고 무게중심 G 의 좌표가 $(3, 4)$ 일 때, 변 $\overline{\text{BC}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(2,\ 3)$

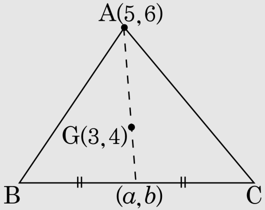
④ $(3,\ 4)$ ⑤ $(4,\ 5)$

해설

무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$$\therefore\ \mathrm{G}\left(\frac{2a+5}{2+1},\ \frac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$$

$$\therefore\ a = 2,\ b = 3$$



31. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{b_2+b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3+a_1}{2},\ \frac{b_3+b_1}{2}\right)$$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$$ 로

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G=\left(\frac{-2-6+5}{3},\ \frac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$$

$\therefore\ 2$

32. 점 $P(a,b)$가 직선 $y=3x+2(-1\le x\le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $Q(a+b, a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $P(a,b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$b=3a+2$(단, $-1\le a\le 2$)$\cdots$㉠

이 때, 점 $Q(a+b, a-b)$에서

$a+b=X$, $a-b=Y$로 놓고

a, b를 X, Y로 나타내면

$$a=\frac{X+Y}{2},\ b=\frac{X-Y}{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{X-Y}{2}=\frac{3X+3Y}{2}+2$$

$\therefore X+2Y+2=0$

한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고

$-1\le a\le 2$이므로 $-2\le 4a+2\le 10$

$\therefore -2\le X\le 10$

따라서 점 $Q(x,y)$는

직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2\le x\le 10$) 위를 움직인다.

그런데 $x=-2$일 때, $y=0$

$x=10$일 때, $y=-6$이므로

구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0)$, $(10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.

$$\therefore \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$$

33. 두 점 A$(3,\ 2)$, B$(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$ 로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \dfrac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3},\ \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore\ a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{9}{5},\ b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

34. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

35. 원점과 직선 $2x-y-5+k(x+2y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\dfrac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

해설

점 $P(x_1,\ y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

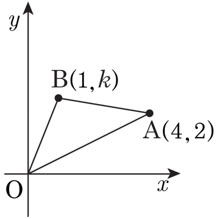
원점과 직선$(2+k)x+(2k-1)y-5=0$ 사이의 거리

$f(k)$ 는 $f(k)=\dfrac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2+(2k-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$

$$\therefore\ \frac{1}{\{f(k)\}^2}=\frac{k^2+1}{5}$$

따라서, $k=0$ 일 때, 최솟값$\dfrac{1}{\{f(0)\}^2}=\dfrac{1}{5}$ 이다.

36. 다음 그림과 같이 O(0, 0), A(4, 2), B(1, k)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 의 넓이가 4 일 때, 양수 k 의 값은?



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

직선 OA 의 방정식은 $x-2y=0$ 이다.

점 B(1, k) 에서 직선 $x-2y=0$ 까지의 거리

h 는 $h=\frac{|1\times1-2\times k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{|1-2k|}{\sqrt{5}}=4$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}\ (\because k>0)$