1. $0<a<b$인 실수, $a,\ b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}$ ② $\dfrac{a}{1+a}\leq\dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$ ④ $\dfrac{a}{1+a}\geq\dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a}=\dfrac{b}{1+b}$

해설

$0<a<b$에서 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\cdots$㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\dfrac{1}{a}+1>\dfrac{1}{b}+1,\ \dfrac{1+a}{a}>\dfrac{1+b}{b}\cdots$㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\dfrac{a}{1+a}<\dfrac{b}{1+b}$

2. $-1 \le x \le 2$, $-5 \le y \le -2$ 일 때, $3x - 2y$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -8　③ 8　④ 16　⑤ 18

해설

$-1 \le x \le 2$ 이므로 $-3 \le 3x \le 6 \cdots\cdots$ ㉠
$-5 \le y \le -2$ 이므로 $4 \le -2y \le 10 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ + ㉡을 하면 $1 \le 3x - 2y \le 16$ 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 16

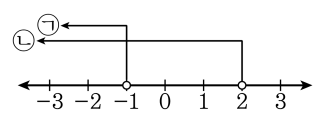
3. 부등식 $ax + 1 > 3x + 2a$ 의 해가 $x < 1$ 일 때, a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(a-3)x > 2a-1$ 이므로
먼저 $a = 3$ 인 경우를 생각하면
(좌변)$= 0$, (우변)$= 5$ 가 되어 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 $a \neq 3$ 인 경우만 생각하면 된다.
(i) $a > 3$ 이면 $x > \dfrac{2a-1}{a-3}$ 이 되어 $x < 1$ 의 형태가 될 수 없다.
(ii) $a < 3$ 이면 $x < \dfrac{2a-1}{a-3} = 1$ 에서 $2a - 1 = a - 3$ $\therefore a = -2$

4. 다음은 연립부등식 $\begin{cases} ax+b<0 \cdots ㉠ \\ cx+d>0 \cdots ㉡ \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 나타낸 것이다. 이 때, 연립부등식의 해는?



① $x<-1$　② $x<2$　③ $-1<x<2$
④ $-1 \le x<2$　⑤ $x>-1$

해설

$x<-1$과 $x<2$ 의 공통부분이 연립부등식의 해이다.
$\therefore\ x<-1$

5. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \leq 11$ 를 만족하는 정수를 모두 구하면?

① $-1, 0, 1$ ② $0, 1, 2$ ③ $-1, 0, 1, 2$
④ $-2, -1, 0, 1$ ⑤ $0, 1, 2, 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \leq \dfrac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 : $-1, 0, 1, 2$ 이다.

6. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x+4>5x \\ 15-x>a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x+4>5x$

$\therefore\ x>-2$

$15-x>a$

$\therefore\ x<15-a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8<15-a\le 9$

$6\le a<7$

$\therefore\ a=6$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-2 \ge -10 \\ 6-x > 3 \end{cases}$ 의 해가 $a \le x < b$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$6-x>3 \rightarrow x<3$
$4x-2 \ge -10 \rightarrow x \ge -2$
$\therefore\ a+b=-2+3=1$

8. 이차부등식 $x^2+2x-35<0$을 풀면?

① $-15<x<12$ ② $-15<x<5$ ③ $-7<x<5$
④ $-7<x<2$ ⑤ $-5<x<7$

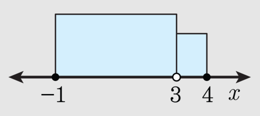
해설
$x^2+2x-35<0$에서 $(x+7)(x-5)<0$
$\therefore -7<x<5$

9. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 9 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 \le 0 \end{cases}$ 의 해를 바르게 구한 것을 고르면?

① $-1 \le x < 4$
② $3 < x \le 4$
③ $-1 \le x < 3$
④ $-1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$
⑤ 해가 없다

해설

$\begin{cases} (x-3)^2 > 0 & : \ x \ne 3\text{인 모든 실수} \\ (x-4)(x+1) \le 0 & : \ -1 \le x \le 4 \end{cases}$



$\therefore\ -1 \le x < 3$ 또는 $3 < x \le 4$

10. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$ 에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m\cdots$㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\geq 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1\cdots$㉡

$1-m\geq 0$에서 $m\leq 1\cdots$㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

11. 연립부등식$\{x \mid 3-x>-1,\ 3x-1\ge 2\}$ 의 해를 $a \le x < b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 17　　② 16　　③ 15　　④ 14　　⑤ 13

해설

$3-x>-1,\quad -x>-1-3,\ x<4,$

$3x-1\ge 2,\quad 3x\ge 3,\quad x\ge 1$ 이므로

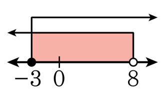
연립부등식의 해는 $1 \le x < 4$,

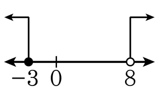
따라서 $a^2+b^2=1+16=17$ 이다.

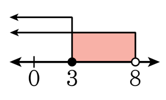
12. 연립부등식

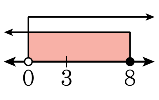
$$\begin{cases} 2(x-4) < x \\ 2x+3 \le 3(x+2) \end{cases}$$

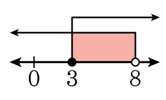
의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

1. $2(x-4) < x,\ \ x < 8$
2. $2x+3 \le 3(x+2),\ \ x \ge -3$

공통된 해를 찾으면 $-3 \le x < 8$

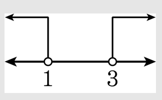
13. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$ 의 해는?

① $-3 < x < 3$ ② $x < -3$ ③ $x > 3$

④ 해가 없다. ⑤ $-3 < x < 5$

해설

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 2 \\ 7x + 5 < 2x + 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 5x < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

14. 연립부등식 $\begin{cases} -x+1<4 \\ 4x+2<-10 \end{cases}$ 의 해는?

① $x<-3$ ② $x=-3$ ③ $x>-3$
④ $-3<x<3$ ⑤ 해가 없다.

해설
(i) $-x+1<4$, $x>-3$
(ii) $4x+2<-10$, $x<-3$
따라서 해가 없다.

15. 연립부등식 $2x+a<x+2<4(x-1)$ 의 해가 $b<x<5$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -5　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$2x+a<x+2<4(x-1)$
$2x+a<x+2 \rightarrow x<2-a$
$x+2<4(x-1) \rightarrow x>2$
$2<x<2-a$ 가 $b<x<5$ 이므로 $a=-3,\ b=2$
$\therefore\ a+b=-1$

16. 연립부등식

$\begin{cases} 4x - a < 3x \\ 3(x-2) \geq 2x - 1 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < 10$ ② $a \leq 10$ ③ $a > 5$

④ $a \leq 5$ ⑤ $a > 3$

해설

$4x - a < 3x$, $x < a$, $3(x-2) \geq 2x - 1$, $x \geq 5$, 해가 없으려면 $a \leq 5$

17. 모든 실수 x에 대하여 $a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$가 성립할 때 a의 최솟값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$에서
$(a-2)x^2+2(a-2)x+(2a-5) \geq 0$
이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로
$a-2>0 \cdots$ ㉠
판별식 $\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(2a-5) \leq 0$이므로
$a^2-4a+4-(2a^2-9a+10)$
$=a^2-4a+4-2a^2+9a-10$
$=-a^2+5a-6$
$=-(a^2-5a+6)$
$=-(a-2)(a-3) \leq 0$
따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$이므로
$a \leq 2$ 또는 $a \geq 3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a \geq 3$
따라서 a의 최솟값은 3

18. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$

② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$

④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로
$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$
$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$
$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$
따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$
$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$
$(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\ (\because 0 < \alpha < \beta)$

19. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$　② $-1<a<3$　③ $0 \le a \le 3$
④ $-1<a<4$　⑤ $-1 \le a \le 4$

해설

(i) $a=0$일 때, 성립한다.
(ii) $a \neq 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D \le 0$이므로
$a^2-3a \le 0$
$\therefore 0<a \le 3(\because a \neq 0)$

20. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ …… ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

21. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$을 풀면?

① $-5 < x < 5$　② $-5 < x < 0$　③ $-5 < x < 1$
④ $-1 < x < 5$　⑤ $-1 < x < 6$

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로
$x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x-5)(x+1) < 0$
$-1 < x < 5$
이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$
(ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 4x - 5 < 0$, $(x+5)(x-1) < 0$
$-5 < x < 1$
이 때 $x < 0$과 공통 범위는 $-5 < x < 0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $-5 < x < 5$

22. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

23. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3\le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는?

① $4\le a\le 12$ ② $a\le 4,\ a\ge 12$ ③ $6\le a\le 8$
④ $a\le 6,\ a\ge 8$ ⑤ $4\le a\le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3\le 0$의 실수해가 존재하려면
$D=(a-6)^2-4(a-3)\ge 0$
$a^2-16a+48\ge 0,\ (a-4)(a-12)\ge 0$
$\therefore\ a\le 4,\ a\ge 12$

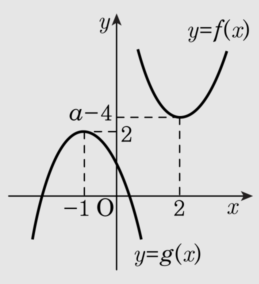
24. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로
$a - 4 > 2$ $\quad \therefore\ a > 6$



25. 세 변의 길이가 $x-1,\ x,\ x+1$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 x의 값의 범위가 $a<x<b$라 할 때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

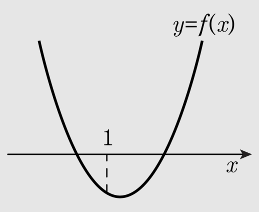
$x-1,\ x,\ x+1$은 삼각형의 세 변이므로
$x-1>0$, $x>0$, $x+1>0$
$x-1+x>x+1 \therefore x>2 \cdots\cdots$ ①
한편, 둔각삼각형이 되려면 $(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$
$x^2-4x<0$에서 $0<x<4 \quad \cdots\cdots$ ②
①과 ②에서 $2<x<4$
$\therefore\ a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$

26. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$
④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$
$\therefore\ m > 5$



27. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y=2[x]+3$, $y=3[x-2]+5$를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x에 대하여 $x+y$의 범위를 구하면?

① $13 < x+y < 14$　② $14 < x+y < 15$
③ $-4 < x+y < 4$　④ $15 < x+y < 16$
⑤ $x+y=16.4$

해설

$2[x]+3=3[x-2]+5$, $2[x]+3=3([x]-2)+5$
$\therefore\ [x]=4$
x가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$
$y=2[x]+3=11$이므로 $15 < x+y < 16$

28. <보기> x에 대한 부등식 $ax^2 + 4ax + 5a > 0$의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a > 0$일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a = 0$일 때 해는 $x = 0$뿐이다.
㉢ $a < 0$일 때 해는 없다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + 4ax + 5a > 0$에서
$a(x^2 + 4x + 5) > 0,\ a\{(x+2)^2 + 1\} > 0$
㉠ $a > 0$일 때 $(x+2)^2 + 1 > 0$ $\therefore$ 모든 실수
㉡ $a = 0$일 때 $0 \cdot \{(x+2)^2 + 1\} > 0$ $\therefore$ 해는 없다.
㉢ $a < 0$일 때 $(x+2)^2 + 1 < 0$ $\therefore$ 해는 없다.

29. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10%를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60　② $\frac{200}{3}$　③ $\frac{230}{3}$　④ 80　⑤ 90

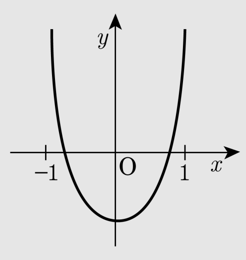
해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당
판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab이므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$
이 부등식을 정리하면
$9x^2-900x+20000\leq 0$
$(3x-100)(3x-200)\leq 0$
$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$

30. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설



$\mathrm{D}/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore\ k\le 0,\quad k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$