1. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ 라고 하면 $\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.
이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2,\ \alpha\beta = k$ 이고
x축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$
$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k,\ 32 = 4 - 4k$
$\therefore k = -7$

2. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a^3 + b^3$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9　　② -8　　③ -7　　④ -6　　⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식$-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a+2)x + b + 1 = 0$의 판별식을
D_2라 할 때,
$D_2 = (a+2)^2 - 4(b+1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a+2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

3. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 $\sqrt{5}+1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$의 교점의 x좌표는
$x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
$\sqrt{5}+1$이 근이므로, $-\sqrt{5}+1$도 근이다.
근과 계수의 관계에 의해
$b = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2$
$-a = (\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1) = -4$
$\therefore\ a = 4 \qquad \therefore a+b = 6$

4. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1$, $b = -1$
② $a = -1$, $b = 0$
③ $a = 1$, $b = 0$
④ $a = 1$, $b = -1$
⑤ $a = 0$, $b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots ①$
$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots ②$
$y = -x + 6 \quad \cdots ③$
두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로
②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.
②, ③을 연립하여 풀면
교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로
$4a + 2b + 8 = 4$, $a - b + 8 = 7$
$\therefore\ a = -1$, $b = 0$

5. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

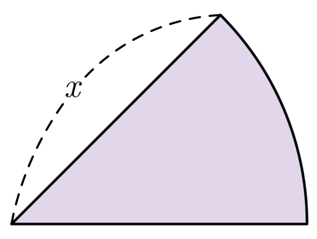
해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면
$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

6. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

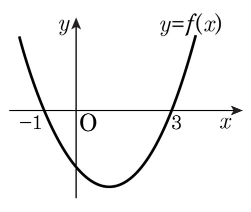
해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

7. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1, 3 이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a > 0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이므로
$f(2x-1) = 0$ 에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2 이다.

8. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식$x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2 + 4xk + \left(x^2 - 1\right) = 0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5\left(x^2 - 1\right) \geq 0$

$-x^2 + 5 \geq 0,\ x^2 - 5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

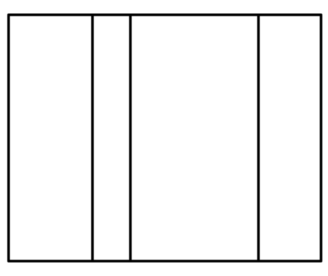
그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

10. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2 + 350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2 - 140x + 70^2 - 70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2 + 12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

11. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원　② 3500 원　③ 4000 원
④ 4500 원　⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$f(x) = (6000 - 500x)(600 + 100x)$$
$$= -50000x^2 + 300000x + 3600000$$
$$= -50000(x-3)^2 + 4050000$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.
즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

12. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　② 7 초 후　③ 8 초 후
④ 10 초 후　⑤ 알 수 없다

해설

$y=50t-5t^2$
$y=-5(t^2-10t+25-25)$
$=-5(t-5)^2+125$
따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

13. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a + b)$, $(-3,\ -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,
즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, -3 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(x) &= g(x) - f(x)\\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b)\\ &= x^2 + 2x - 3\\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

14. 네 함수 $F(x)=x^2+4x+9$, $G(x)=x^2-6x+4$, $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=cx+d$ 가 있다. $F(x)$ 와 $G(x)$ 가 최솟값을 갖게 되는 x 값들이 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표값일 때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 가 최솟값을 갖게되는 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$F(x)=x^2+4x+9=(x+2)^2+5$, $G(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$
이므로 각각의 함수는 $x=-2,\ x=3$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 -2와 3 이므로
$x^2+ax+b=cx+d$,
즉 $x^2+(a-c)x+(b-d)=0$ 은 두 근이 $-2,\ 3$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a-c=-1,\ b-d=-6$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(x)&=f(x)-g(x)\\&=x^2+(a-c)x+(b-d)\\&=x^2-x-6\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\end{aligned}$$

따라서 $h(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

15. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ $(-3 \le x \le -1)$ 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$

$= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4}$

(1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f(-3) = 7p + 39 = 0$

$\therefore\ p = -\frac{39}{7}$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

(2) $-3 \le \frac{6+p}{2} \le -1$, 즉, $-12 \le p \le -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$\therefore\ p = -2$ 또는 6

그런데 $-12 \le p \le -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

(3) $\frac{6+p}{2} \ge -1$, 즉, $p \ge -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$\therefore\ p = -\frac{19}{5}$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.

16. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

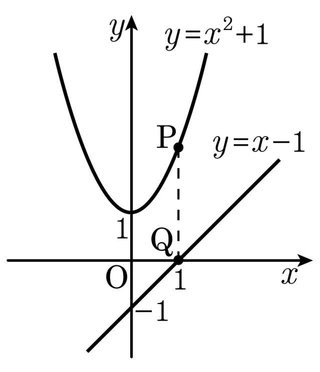
(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

17. 포물선 $y=x^2+1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y=x-1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{7}{4}$

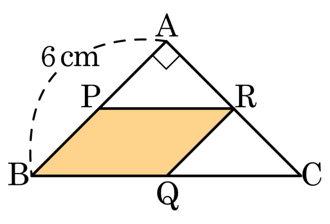
해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t-1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2+1-(t-1)\\ &= t^2-t+2\\ &= \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

18. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. □PBQR 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PBQR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle RQC)$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{\frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2\right\}$$
$$= 18 - (x^2 - 6x + 18)$$
$$= -x^2 + 6x$$
$$= -(x-3)^2 + 9$$

따라서 $\overline{BP} = 3\text{cm}$ 일 때, □PBQR 의 넓이가 최대가 된다.