**1.** 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, 상수 $k$의 값은?

① $-8$ ② $-7$ ③ $-6$ ④ $-5$ ⑤ $-4$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha < \beta)$라고 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$의 두 실근이다.

이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$이고

$x$축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k$, $32 = 4 - 4k$

$\therefore k = -7$

**2.** 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, 상수 $a, b$ 에 대하여 $a^3 + b^3$ 의 값은? (단, $a \neq 0$ )

① $-9$ ② $-8$ ③ $-7$ ④ $-6$ ⑤ $-5$

해설

이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$ ,
즉 $x^2 - ax - b = 0$ 의 판별식을 $D_1$ 이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots ㉠$
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = ax + b$ 가 접하므로
이차방정식 $-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a+2)x + b + 1 = 0$ 의 판별식을
$D_2$ 라 할 때,
$D_2 = (a+2)^2 - 4(b+1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots ㉡$
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a+2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

**3.** 유리수 $a, b$에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$가 두 점 $P$, $Q$에서 만난다. 점 $P$의 $x$좌표가 $\sqrt{5} + 1$일 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$의 교점의 $x$좌표는
$x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
$\sqrt{5} + 1$이 근이므로, $-\sqrt{5} + 1$도 근이다.
근과 계수의 관계에 의해
$b = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} + 1 = 2$
$-a = (\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 1) = -4$
$\therefore\ a = 4 \qquad \therefore a + b = 6$

**4.** 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$ , $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 $a$, $b$ 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -1$

② $a = -1,\ b = 0$

③ $a = 1,\ b = 0$

④ $a = 1,\ b = -1$

⑤ $a = 0,\ b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots ①$

$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots ②$

$y = -x + 6 \quad \cdots ③$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로

②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.

②, ③을 연립하여 풀면

교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,

이 두 점을 곡선 ①이 지나므로

$4a + 2b + 8 = 4,\ a - b + 8 = 7$

$\therefore\ a = -1,\ b = 0$

**5.** 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

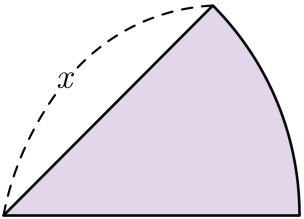
$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은

$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

**6.** 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 $x$ 라 하고, 부채꼴의 넓이를 $y$ 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.




▶ 답:

▷ 정답: 3

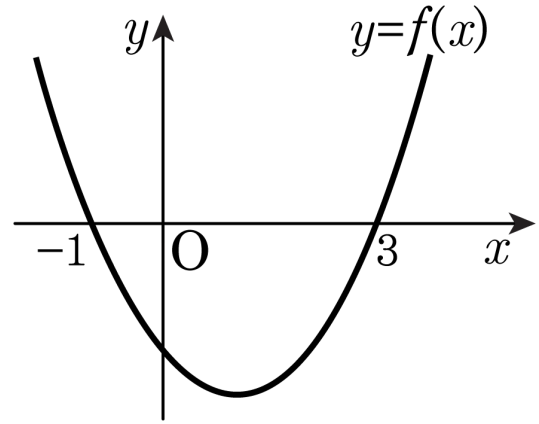
해설

부채꼴의 넓이를 $y$, 반지름의 길이를 $x$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $y$ 가 최댓값 9를 가진다.

**7.** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은?




① $-1$ ② $0$ ③ $1$

④ $2$ ⑤ $3$

해설

$y=f(x)$의 그래프와 $x$ 축의 교점의 $x$ 좌표가 $-1$, $3$이므로
$f(x)=a(x+1)(x-3)\,(a>0)$으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1)=a(2x-1+1)(2x-1-3)=4ax(x-2)$이므로
$f(2x-1)=0$에서
$4ax(x-2)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$
따라서 두 근의 합은 $2$이다.

**8.** $x+y=10$ 일 때, $x^2+y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

**9.** $x$ 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 $\alpha$, $\beta$ 라고 할 때, $\alpha$ 의 최댓값과 $\beta$ 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, $k$ 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 $k$ 에 대하여 정리하면

$5k^2 + 4xk + (x^2 - 1) = 0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 $k$ 에 대한 이차방정식이고 $k$ 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 $D$ 에 대하여

$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5(x^2 - 1) \geq 0$

$-x^2 + 5 \geq 0,\ x^2 - 5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

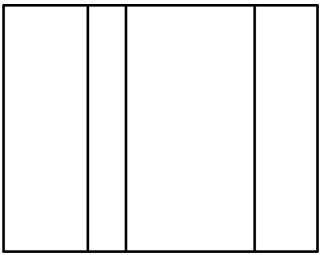
그런데 $\alpha$, $\beta$ 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

$\alpha$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$ , $\beta$ 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

**10.** 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 $x$ 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$ ,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 $S$ 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2+350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2-140x+70^2-70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2+12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

**11.** 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원 ② 3500 원 ③ 4000 원

④ 4500 원 ⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$f(x) = (6000 - 500x)(600 + 100x)$$
$$= -50000x^2 + 300000x + 3600000$$
$$= -50000(x-3)^2 + 4050000$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.

즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

**12.** 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 $t$ 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후

④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다

해설

$y = 50t - 5t^2$

$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$

$= -5(t-5)^2 + 125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

**13.** 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a + b)$, $(-3,\ -3a + b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4$

해설

두 함수의 그래프의 교점의 $x$ 좌표가 1 과 $-3$ 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,
즉, $x^2 + (c - a)x + (d - b) = 0$ 은 두 근이 1, $-3$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c - a)x + (d - b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 $-4$ 를 갖는다.

**14.** 네 함수 $F(x)=x^2+4x+9$, $G(x)=x^2-6x+4$, $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=cx+d$ 가 있다. $F(x)$ 와 $G(x)$ 가 최솟값을 갖게 되는 $x$ 값들이 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 $x$ 좌표값일 때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 가 최솟값을 갖게되는 $x$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$F(x)=x^2+4x+9=(x+2)^2+5$, $G(x)=x^2-6x+4=(x-3)^2-5$ 이므로 각각의 함수는 $x=-2$, $x=3$ 일 때, 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점의 $x$ 좌표는 $-2$와 $3$ 이므로
$x^2+ax+b=cx+d$,
즉 $x^2+(a-c)x+(b-d)=0$ 은 두 근이 $-2$, $3$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$a-c=-1$, $b-d=-6$

$$\begin{aligned}\therefore\ h(x) &= f(x)-g(x)\\ &= x^2+(a-c)x+(b-d)\\ &= x^2-x-6\\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\end{aligned}$$

따라서 $h(x)$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

**15.** 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ $(-3 \le x \le -1)$ 의 최솟값이 0 일 때, $p$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{19}{5}$

해설

$f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$

$= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4}$

(1) $\frac{6+p}{2} < -3$ , 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f(-3) = 7p + 39 = 0$

$\therefore\ p = -\frac{39}{7}$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 $p$ 값은 존재하지 않는다.

(2) $-3 \le \frac{6+p}{2} \le -1$ , 즉, $-12 \le p \le -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$\therefore\ p = -2$ 또는 6

그런데 $-12 \le p \le -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 $p$ 값이 존재하지 않는다.

(3) $\frac{6+p}{2} \ge -1$, 즉, $p \ge -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$\therefore\ p = -\frac{19}{5}$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.

**16.** $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 $-8$ 일 때, 모든 실수 $a$ 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 $x$ 좌표는 $-a$ 이다.

( i ) $-a < -1$ , 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$

$\therefore\ a = 5$

( ii ) $-1 \le -a < 2$ , 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

$-2 < a \le 1$ 이므로 $a$ 의 값은 존재하지 않는다.

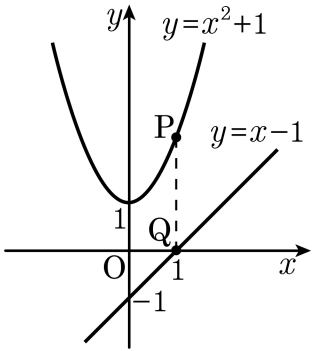
(iii) $-a \ge 2$ , 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$

$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 $a$ 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

**17.** 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 $y$ 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.




▶ 답:

▷ 정답: $\frac{7}{4}$

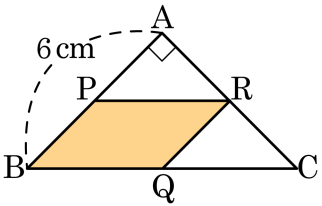
해설

$\overline{PQ}$ 가 $y$ 축에 평행하므로 점 P, Q 의
$x$ 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를
$(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

**18.** 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. □PBQR 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하여라.




▶ 답 : cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PBQR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle RQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{ \frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2 \right\}$$

$$= 18 - (x^2 - 6x + 18)$$

$$= -x^2 + 6x$$

$$= -(x-3)^2 + 9$$

따라서 $\overline{BP} = 3$cm 일 때, □PBQR 의 넓이가 최대가 된다.