

1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$

② $-\frac{5}{3}$

③ 0

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

2. 다음 중 최댓값을 갖지 않는 것은?

① $y = -4x^2 + 1$

② $y = -2(x - 1)^2 + 10$

③ $y = x^2 + 3x + 1$

④ $y = -2x^2 + 3x + 1$

⑤ $y = -(x + 1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수일 때 최댓값을 갖는다.

3. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ ($-1 \leq x \leq 2$) 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$

② $-\frac{16}{3}$

③ $-\frac{3}{4}$

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x 의 값의 범위 $-1 \leq x \leq 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

4. $x = -1$ 일 때, 최댓값 3 을 갖고 한 점 $(1, -1)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -2(x+1)^2 - 4$

② $y = (x-2)^2 - 3$

③ $y = -2(x-1)^2 + 3$

④ $y = -(x+1)^2 + 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

해설

꼭짓점이 $(-1, 3)$ 이므로 $y = a(x+1)^2 + 3$

$(1, -1)$ 을 대입하면 $-1 = 4a + 3$

$$a = -1$$

$$\therefore y = -(x+1)^2 + 3$$

5. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 이차함수의 최솟값은?

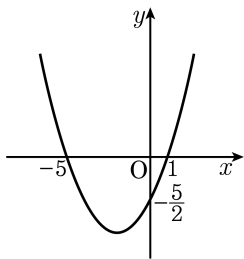
① 3

② 4

③ $\frac{2}{5}$

④ $-\frac{3}{5}$

⑤ $-\frac{9}{2}$



해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 x 절편이 1, -5 이므로 $y = a(x-1)(x+5)$

점 $(0, -\frac{5}{2})$ 를 지나므로 $-\frac{5}{2} = a(0-1)(0+5)$, $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore y &= \frac{1}{2}(x-1)(x+5) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{9}{2}$

7. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 : $-\frac{9}{2}$

② 최댓값 : $-\frac{7}{2}$

③ 최솟값 : $\frac{9}{2}$

④ 최댓값 : $-\frac{9}{2}$

⑤ 최솟값 : -1

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + x - 5 \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 $x = 1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{9}{2}$ 를 가진다.

8. 이차함수 $y = 3x^2 + 6x + a$ 의 최솟값이 7 일 때, a 의 값을 고르면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$y = 3(x+1)^2 - 3 + a \text{ 이므로}$$

$$-3 + a = 7$$

$$\therefore a = 10$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12

② 9

③ 6

④ 3

⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = 9 - 2a^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$$

$$\text{또 } \alpha, \beta \text{ 는 실근이므로 } \frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$$

$$\therefore a^2 \geq 3$$

따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

10. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1, b = -2$

② $a = 1, b = 2$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 1, b = -2$

⑤ $a = -2, b = 2$

해설

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
 $= a(x-2)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3)$ 이므로
 $x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.

$$-1 = 4a + 3$$

$$\therefore a = -1$$

점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$\therefore b = a + 3 = 2$$

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\&= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ 의 최솟값 : } m &= -a^2 - 2a - 5 \\&= -(a + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

m 의 최댓값 : -4

12. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

13. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18

② 9

③ 7

④ -9

⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,

$$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3.$$

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \leq t \leq 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때, } y = -3 \\ t = 5\text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$$\therefore M \times m = -18$$

14. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(f(x))$ 의 최솟값은?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 이므로

$f(x) = t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(t) = t^2 - 4t + 2 \\ &= (t - 2)^2 - 2 \quad (-2 \leq t \leq 2) \end{aligned}$$

따라서, $t = 2$ 일 때 최솟값은 -2 이다.

15. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100

② 121

③ 144

④ 169

⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28 - x$ 이다.

두 자연수의 곱은 $x(28 - x)$ 이다.

$$x(28 - x) = -x^2 + 28x = -(x - 14)^2 + 196$$

16. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$$

$$= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$$

이 때, x, y, z 가 실수이므로

$$(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$$

따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

17. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x + 2)^2 - (y - 3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x + 2)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

18. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y \text{라 놓고,}$$

양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면

$$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$$

$$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$$

x 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$$

$$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$$

$$11 < \sqrt{137} < 12 \text{이므로}$$

$$-0. \times \times \times \leq y \leq 5. \times \times \times$$

따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

19. 가로 길이가 6cm, 세로 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 x cm 길게 하고 세로의 길이를 x cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 14

⑤ 15

해설

넓이를 y 라 하면

$$y = (6 + x)(10 - x)$$

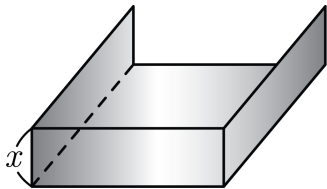
$$= -x^2 + 4x + 60$$

$$= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60$$

$$= -(x - 2)^2 + 64$$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

20. 너비가 60 인 양철판을 아래 그림과 같이 구부려서 물받이를 만들려고 한다. 구부리는 양철판의 길이를 x 라 할 때, 단면의 넓이가 최대가 되는 x 의 값을 구하여라.



① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

단면의 넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned}y &= x(60 - 2x) \\&= -2x^2 + 60x \\&= -2(x^2 - 30x + 225 - 225) \\&= -2(x - 15)^2 + 450\end{aligned}$$

$x = 15$ 일 때, 최대 넓이 450

21. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다.
부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18

② 20

③ 30

④ 32

⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24 - 2x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36 - 36) \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 6$ 일 때,
부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

22. 과학 탐구 반 학생들이 물 로켓을 발사하는데 위로 똑바로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t - 8t^2)$ m 이다. 이 때 물 로켓이 올라갈 수 있는 최대 높이는?

① 30m

② 35m

③ 40m

④ 45m

⑤ 50m

해설

높이를 h 라 하면

$$h = -8t^2 + 40t = -8 \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + 50$$

$\therefore 50\text{m}$

23. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m

② 55m

③ 50m

④ 45m

⑤ 40m

해설

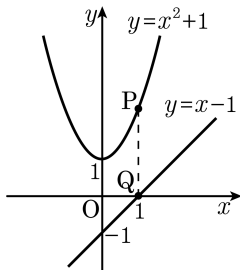
$$\begin{aligned}h &= 30t - 5t^2 \\&= -5(t^2 - 6t + 9) + 45 \\&= -5(t - 3)^2 + 45\end{aligned}$$

24. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에
평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는
점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{3}$

② $\frac{7}{4}$
⑤ $\frac{5}{2}$

③ $\frac{6}{5}$



해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의
x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를
($t, t^2 + 1$) 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 ($t, t - 1$)

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

25. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$(y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0$$

(i) $y=1$ 일 때, $2x=0$

$$\therefore x=0$$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$$

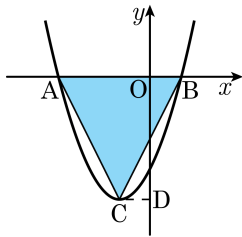
$$(3y-1)(y-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

26. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

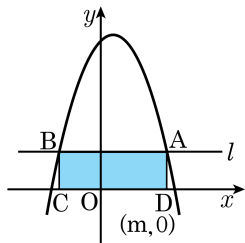
꼭짓점 $C(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ 이므로

$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

27. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, $\square ABCD$ 의 둘레의 길이의 최댓값은? ($\frac{1}{2} < m < 3$)



① $\frac{11}{2}$

② $\frac{31}{4}$

③ 10

④ $\frac{49}{4}$

⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로 길이는 $2\left(m - \frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로 길이는 $-m^2 + m + 6$
($\square ABCD$ 둘레의 길이)

$$= 2\left\{2\left(m - \frac{1}{2}\right) - m^2 + m + 6\right\}$$

$$= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6)$$

$$= 2(-m^2 + 3m + 5)$$

$$= -2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

28. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원

② 3500 원

③ 4000 원

④ 4500 원

⑤ 5000 원

해설

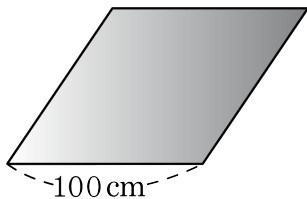
수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= (6000 - 500x)(600 + 100x) \\ &= -50000x^2 + 300000x + 3600000 \\ &= -50000(x - 3)^2 + 4050000 \end{aligned}$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.

즉, (입장권 가격) = $6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

29. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S의 단면적의 최댓값은?



① 695 cm^2

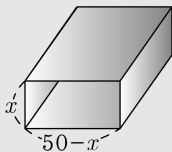
② 710 cm^2

③ 625 cm^2

④ 525 cm^2

⑤ 410 cm^2

해설

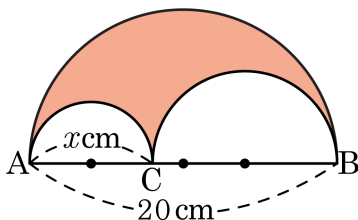


다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으 구부리면 단면적 S는

$$\begin{aligned} S &= x(50 - x) = -x^2 + 50x \\ &= -(x - 25)^2 + 625 \end{aligned}$$

$\therefore x = 25$ 일 때, S의 최댓값은 625 cm^2

30. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{ cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10

② 15

③ 16

④ 25

⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x \text{ cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x) \text{ cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \pi - \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{20-x}{2} \right)^2 \right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8} \pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8} \pi \right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8} \right) \pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi \text{ cm}^2$ 를 갖는다.