1. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$

모든 x에 대해 성립하려면

$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$

공통근 : $a=1$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \le 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37

해설

$5x-45 < 4x-7$, $x < 38$

$4x-7 \le 5x-40$, $33 \le x$

$\therefore\ 33 \le x < 38$

3. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서
$x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3,\ 2$
$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$
$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

4. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

5. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 7

해설

$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x-1)^2 + k + 5$
$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로
$k + 5 = 0$ $\therefore k = -5$

6. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

7. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ 0　⑤ 3

해설

$x^2 + (a+1)x + a + 1 = 0$이 실근을 가지므로
$D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0$, $(a+1)(a-3) \geq 0$
$\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$
한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -(a+1)$, $\alpha\beta = a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - (a+1) \\ &= a^2 + a = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

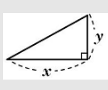
이때, $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로
$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 는 $a = -1$일 때 최솟값을 갖는다.

8. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$\begin{cases} x + y = 21 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots ② \end{cases}$ 이다.

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$

$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$

$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$

$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$

$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$

$(x - 12)(x - 9) = 0$,

$x = 12$ 또는 $x = 9$

$x = 12$ 일 때 $y = 9$

$x = 9$ 일 때 $y = 12$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

9. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$을 만족하는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$에서 $x^2 + (y-1)^2 = 0$
x, y는 실수이므로 $x^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$
따라서, $x = 0$, $y - 1 = 0$이므로 $x = 0$, $y = 1$
$\therefore\ x + y = 0 + 1 = 1$

10. 두 부등식 $2(5-2x) \geq x+5$, $2x+1 > x+a$ 의 공통해가 존재하지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a \geq 2$

해설

$2(5-2x) \geq x+5$, $5 \geq 5x$ $\quad \therefore\ x \leq 1$

$2x+1 > x+a$ $\quad \therefore\ x > a-1$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a-1 \geq 1$ 이어야 한다.

$\therefore\ a \geq 2$

11. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \geq 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \leq 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \leq 0$

$\therefore\ k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

$\therefore\ \ k \geq 4(\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

12. 두 부등식 $-x^2-3x+4 \le 0$,
$x^2+ax+b<0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $1 \le x < 3$일 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 를 구하면?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$-x^2-3x+4 \le 0$, $x^2+3x-4 \ge 0$
$\Rightarrow x \le -4$ 또는 $x \ge 1$
$\therefore\ a=1,\ b=-12 \quad \Rightarrow \quad a+b=-11$

13. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

ⅰ) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ⅱ) $f(1) > 0, \quad 1 - a + 9 > 0, \quad a < 10$

ⅲ) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0,\ \ a \geq 6,\ \ a \leq -6$

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

14. 두 점 A$(-3,\ 2)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $(1, 0)$ ③ $(2, 0)$ ④ $(3, 0)$ ⑤ $(4, 0)$

해설

P의 좌표를 $(x,\ 0)$라 하면
$\sqrt{(-3-x)^2+2^2} = \sqrt{(4-x)^2+5^2}$
$6x+13 = -8x+41, \quad x = 2$
$\therefore \mathrm{P} = (2, 0)$

15. 원 $x^2+y^2=1$ 과 원 밖의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(5,\ 2)$ 가 있다. 원 위를 움직이는 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 24 ② 48 ③ 66 ④ 70 ⑤ 96

해설

중선정리를 이용한다.
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

$\overline{\mathrm{BM}}^2=8$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}}$ 이 최소일 때
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ 의 최솟값을 구할 수 있다.

$\mathrm{M}\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{6+2}{2}\right)=\mathrm{M}(3,\ 4)$ 이므로

$\overline{\mathrm{PM}}\geq\overline{\mathrm{OM}}-1=4$
따라서 구하는 최솟값은 $2(4^2+8)=48$

16. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $3:2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $\mathrm{B}(a,\ b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3a-2}{3-2},\ \dfrac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4,\ 1)$ 이므로

$3a-2=4 \quad \therefore\ a=2,$

$3b-8=1 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ \mathrm{B}(2,\ 3)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}$

17. 두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$이 $a=\alpha$일 때 수직이고, $a=\beta$일 때 평행하다. $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

두 직선 $x-2y+3=0$, $2x+ay-2=0$에 대하여

(1) 수직일 때, $1\cdot 2+(-2)\cdot a=0 \quad \therefore\ \alpha=1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2}=\frac{-2}{a}\neq-\frac{3}{2}$이어야 하므로

$a=-4, \quad \therefore\ \beta=-4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=17$

18. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

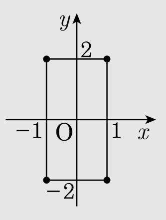
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times4=8$

19. $x=-1+i$ 일 때, $x^4+2x^3+x^2-x-1$ 의 값을 구하면?

① $-1+i$ ② $-i$ ③ i

④ -1 ⑤ 1

해설

$x=i-1 \Rightarrow x+1=i$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2+2x+2=0$

$x^4+2x^3+x^2-x-1$

$=x^2(x^2+2x+2)-x^2-x-1$

$=-x^2-x-1$ $(\because\ x^2+2x+2=0)$

$=-(-2x-2)-x-1$

$=x+1=i$

20. 방정식 $3x^2+5x-2=0$의 두 근을 α,β라 하고 방정식 $5x^2+4x+3=0$의 두 근을 γ,δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

① $-\frac{10}{3}$　　② $-\frac{7}{3}$　　③ $-\frac{4}{3}$　　④ $-\frac{1}{3}$　　⑤ 1

해설

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}\ ,\ \gamma+\delta=-\frac{4}{5},\ \gamma\delta=\frac{3}{5}$

$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$

$=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$

$=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right)$

$=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}\times\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{10}{3}$

21. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a \neq 0,\ b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$　② $a-b=\sqrt{2}$　③ $a+b=0$
④ $ab=0$　⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{2}$

$|a-b| = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2 = 2a^2+2b^2$

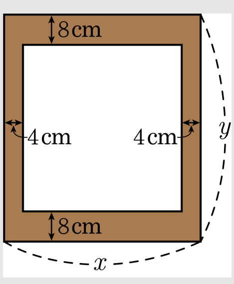
$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

22. 직사각형 모양의 액자를 만드는데 가장자리의 위아래에는 8 cm , 양옆에는 4 cm 의 여백을 두고 가운데 부분에 사진을 넣으려 한다. 액자 둘레의 길이가 224 cm 일 때, 사진의 넓이를 최대로 하는 액자의 짧은 변의 길이를 구하면? (단, 단위는 cm)

① 48 cm ② 50 cm ③ 52 cm ④ 54 cm ⑤ 60 cm

해설



액자의 폭 (가로) 과 아래위 (세로) 의 길이를 각각 x, y 라 하면 주어진 조건에 의하여

$2(x+y) = 224, \quad \therefore \quad x+y = 112$

사진의 넓이 S 는

$S = (x-8)(y-16) = (x-8)(112-x-16)$ 즉, 사진의 넓이는

$= (x-8)(96-x)$

$= -x^2 + 104x - 768$

$= -(x-52)^2 + 1936$

$x = 52, \ y = 60$ 일 때

최대가 된다.

따라서 구하는 액자의 짧은 변의 길이는 52 이다.

해설

액자의 폭 (가로) 과 아래위 (세로) 의 길이를

각각 x, y 라 하면

사진의 넓이는 $S = (x-8)(y-16)$ 이다.

한편, $2(x+y) = 224$ 이므로 $x+y = 112$ 이고

$(x-8)+(y-16) = x+y-24 = 88$

$x-8 > 0, y-16 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균 관계에 의하여

$$\frac{(x-8)+(y-16)}{2} \geq \sqrt{(x-8)(y-16)}$$

$\therefore \ S = (x-8)(y-16) \leq 44^2 = 1936$

따라서 $x-8 = y-16 = 44$ 일 때

S 의 값이 최대이다.

$\therefore \ x = 52, \ y = 60$

23. $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a < 2b,\ b < 3c,\ c < 4d,\ d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 $b,\ c,\ d$가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

24. 좌표평면 위에서 $2x^2 - 3xy + ky^2 - 3x + y + 1 = 0$이 두 개의 직선을 표시할 수 있도록 k의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ 2 ⑤ -2

해설

x에 관해서 정리하면, $2x^2 - (3y + 3)x + ky^2 + y + 1 = 0 \cdots$ ㉠
㉠이 두 개의 일차식의 곱으로 표시되어야 하므로
$\mathrm{D} = 9(y+1)^2 - 8(ky^2 + y + 1)$
$= (9 - 8k)y^2 + 10y + 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.
$\therefore \mathrm{D}/4 = 5^2 - (9 - 8k) = 0$에서 $k = -2$

25. 좌표평면 위의 두 점 A $(x_1,\ y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 3 : 2 으로 내분하는 점을 C라 할 때, 선분 AC와 점 B 사이의 관계는?

① 점 B는 선분 AC 를 5 : 3 으로 외분하는 점이다.

② 점 B는 선분 AC 를 5 : 2 로 외분하는 점이다.

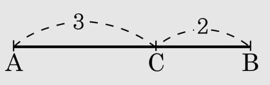
③ 점 B는 선분 AC 를 3 : 2 로 외분하는 점이다.

④ 점 B는 선분 AC 를 3 : 1 로 내분하는 점이다.

⑤ 점 B는 선분 AC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.

해설

문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\overline{AC}$: $\overline{CB}$ 3 : 2 이므로,
위의 그림에서 보듯이,
$\overline{AB}$: $\overline{BC}$ 5 : 2 이다.
따라서 점 B는 선분 $\overline{AC}$ 를 5 : 2 으로 외분하는 점이다.