

1. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$$

모든 x 에 대해 성립하려면

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad a - 1 = 0$$

공통근 : $a = 1$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \leq 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33

② 34

③ 35

④ 36

⑤ 37

해설

$$5x - 45 < 4x - 7, \quad x < 38$$

$$4x - 7 \leq 5x - 40, \quad 33 \leq x$$

$$\therefore 33 \leq x < 38$$

3. 실수 a, b 에 대하여 연산 $*$ 를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$$x * (x - 6) = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -3, 2$$

$$\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 1$$

4. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$ 의 그래프에 의하여 잘려지는 x 축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = 3k + 2$

잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$

이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$

$$k^2 - 12k - 17 = 0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 12이다.

5. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + k + 2$ 의 최댓값이 0 일 때, k 의 값은?

① -5

② -3

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 7

해설

$$y = -3x^2 + 6x + k + 2 = -3(x - 1)^2 + k + 5$$

$x = 1$ 일 때, 최댓값이 $k + 5$ 이므로

$$k + 5 = 0 \quad \therefore k = -5$$

6. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a + 6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

7. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a+1 = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 의 값이 최소일 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ 0

⑤ 3

해설

$x^2 + (a+1)x + a+1 = 0$ 이 실근을 가지므로
 $D = (a+1)^2 - 4(a+1) \geq 0$, $(a+1)(a-3) \geq 0$
 $\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -(a+1)$, $\alpha\beta = a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - (a+1) \\ &= a^2 + a = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

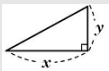
이때, $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta$ 는 $a = -1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

8. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 21 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{이다.}$$

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$$

$$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$$

$$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$$

$$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$$

$$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$$

$$(x - 12)(x - 9) = 0,$$

$$x = 12 \text{ 또는 } x = 9$$

$$x = 12 \text{ 일 때 } y = 9$$

$$x = 9 \text{ 일 때 } y = 12$$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

9. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \text{에서 } x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$x, y \text{는 실수이므로 } x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{따라서, } x = 0, y - 1 = 0 \text{이므로 } x = 0, y = 1$$

$$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$$

10. 두 부등식 $2(5 - 2x) \geq x + 5$, $2x + 1 > x + a$ 의 공통해가 존재하지 않을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \geq 2$

해설

$$2(5 - 2x) \geq x + 5, 5 \geq 5x \quad \therefore x \leq 1$$

$$2x + 1 > x + a \quad \therefore x > a - 1$$

따라서 해가 존재하지 않기 위해서는 $a - 1 \geq 1$ 이어야 한다.

$$\therefore a \geq 2$$

11. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2 - x + 1)$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$(x+1)^2 \leq k(x^2 - x + 1)$$

$$(k-1)x^2 - (k+2)x + k-1 \geq 0$$

모든 x 에 대해 성립하려면,

$k-1 > 0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$$D = (k+2)^2 - 4(k-1)(k-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\{(k+2) - 2(k-1)\}\{(k+2) + 2(k-1)\}$$

$$= (-k+4)k \leq 0$$

$$\therefore k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$\therefore k \geq 4 (\because k > 1) \quad \therefore \text{최솟값: } 4$$

12. 두 부등식 $-x^2 - 3x + 4 \leq 0$,

$x^2 + ax + b < 0$ 에 대하여

두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $1 \leq x < 3$ 일 때, 실수 a, b 의 합 $a + b$ 를 구하면?

① -12

② -11

③ -10

④ 11

⑤ 12

해설

$$-x^2 - 3x + 4 \leq 0, \quad x^2 + 3x - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 1$$

$$\therefore a = 1, b = -12 \Rightarrow a + b = -11$$

13. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$$\therefore k = -6$$

14. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(3, 0)$

⑤ $(4, 0)$

해설

P 의 좌표를 $(x, 0)$ 라 하면

$$\sqrt{(-3-x)^2 + 2^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 5^2}$$

$$6x + 13 = -8x + 41, \quad x = 2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

15. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 원 밖의 두 점 A(1, 6), B(5, 2) 가 있다. 원 위를 움직이는 임의의 점 P(x_1 , y_1) 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 24

② 48

③ 66

④ 70

⑤ 96

해설

중선정리를 이용한다.

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2(\overline{PM}^2 + \overline{BM}^2)$$

$\overline{BM}^2 = 8$ 이므로 $\overline{PM}$ 이 최소일 때

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최솟값을 구할 수 있다.

$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = M(3, 4) \text{ 이므로}$$

$$\overline{PM} \geq \overline{OM} - 1 = 4$$

따라서 구하는 최솟값은 $2(4^2 + 8) = 48$

16. 좌표평면 위의 점 $A(1, 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $3 : 2$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표가 $(4, 1)$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

점 B 의 좌표를 $B(a, b)$ 라 하면

점 Q 의 좌표는 $Q\left(\frac{3a-2}{3-2}, \frac{3b-8}{3-2}\right)$ 이다.

이때, 점 Q 의 좌표가 $(4, 1)$ 이므로

$$3a - 2 = 4 \quad \therefore a = 2,$$

$$3b - 8 = 1 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore B(2, 3)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

17. 두 직선 $x - 2y + 3 = 0$, $2x + ay - 2 = 0$ 이 $a = \alpha$ 일 때 수직이고, $a = \beta$ 일 때 평행하다. $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

두 직선 $x - 2y + 3 = 0$, $2x + ay - 2 = 0$ 에 대하여

(1) 수직일 때, $1 \cdot 2 + (-2) \cdot a = 0 \quad \therefore \alpha = 1$

(2) 평행할 때, $\frac{1}{2} = \frac{-2}{a} \neq -\frac{3}{2}$ 이어야 하므로

$a = -4, \quad \therefore \beta = -4$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 17$

18. $|x|(2+3i) + 2|y|(1-2i) = 6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$(2|x| + 2|y|) + (3|x| - 4|y|)i = 6 - 5i$$

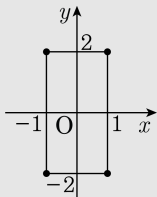
복소수의 상등에 의하여

$$|x| + |y| = 3, \quad 3|x| - 4|y| = -5$$

두 식을 연립하면

$$|x| = 1, \quad |y| = 2$$

$$(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$



$$\therefore \text{직사각형의 넓이} = 2 \times 4 = 8$$

19. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

20. 방정식 $3x^2 + 5x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 방정식 $5x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

① $-\frac{10}{3}$

② $-\frac{7}{3}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ 1

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}, \gamma + \delta = -\frac{4}{5}, \gamma\delta = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \right) \\ &= \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} \times \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

21. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a - b = 0$

② $a - b = \sqrt{2}$

③ $a + b = 0$

④ $ab = 0$

⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

양변을 제곱하면 $a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

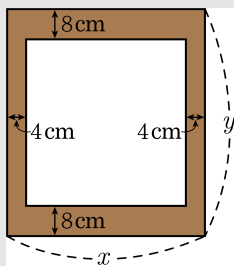
$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

따라서 $a + b = 0$

22. 직사각형 모양의 액자를 만드는데 가장자리의 위아래에는 8 cm, 양 옆에는 4 cm 의 여백을 두고 가운데 부분에 사진을 넣으려 한다. 액자 둘레의 길이가 224 cm 일 때, 사진의 넓이를 최대로 하는 액자의 짧은 변의 길이를 구하면? (단, 단위는 cm)

- ① 48 cm ② 50 cm ③ 52 cm ④ 54 cm ⑤ 60 cm

해설



액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를 각각 x , y 라 하면
주어진 조건에 의하여

$$2(x + y) = 224, \therefore x + y = 112$$

사진의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= (x - 8)(y - 16) = (x - 8)(112 - x - 16) \text{ 즉, 사진의 넓이는} \\ &= (x - 8)(96 - x) \\ &= -x^2 + 104x - 768 \\ &= -(x - 52)^2 + 1936 \end{aligned}$$

$x = 52$, $y = 60$ 일 때

최대가 된다.

따라서 구하는 액자의 짧은 변의 길이는 52 이다.

해설

액자의 폭(가로)과 아래위(세로)의 길이를
각각 x , y 라 하면

사진의 넓이는 $S = (x - 8)(y - 16)$ 이다.

한편, $2(x + y) = 224$ 이므로 $x + y = 112$ 이고

$$(x - 8) + (y - 16) = x + y - 24 = 88$$

$x - 8 > 0$, $y - 16 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균 관계에 의하여

$$\frac{(x - 8) + (y - 16)}{2} \geq \sqrt{(x - 8)(y - 16)}$$

$$\therefore S = (x - 8)(y - 16) \leq 44^2 = 1936$$

따라서 $x - 8 = y - 16 = 44$ 일 때

S 의 값이 최대이다.

$$\therefore x = 52, y = 60$$

23. a, b, c, d 는 정수이고, $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 100$ 을 만족시킬 때, a 의 최댓값은?

- ① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a 의 최댓값은 b, c, d 가 각각 최대일 때이다.
 d 의 최댓값은 99이고,
 $c < 4 \cdot 99 = 396$ 이므로 c 의 최댓값은 395,
 $b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b 의 최댓값은 1184,
 $a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a 의 최댓값은 2367

24. 좌표평면 위에서 $2x^2 - 3xy + ky^2 - 3x + y + 1 = 0$ 이 두 개의 직선을 표시할 수 있도록 k 의 값은?

① 1

② -1

③ 3

④ 2

⑤ -2

해설

x 에 관해서 정리하면, $2x^2 - (3y + 3)x + ky^2 + y + 1 = 0 \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{7}$ 이 두 개의 일차식의 곱으로 표시되어야 하므로

$$D = 9(y + 1)^2 - 8(ky^2 + y + 1)$$

$= (9 - 8k)y^2 + 10y + 1$ 이 완전제곱식이 되어야 한다.

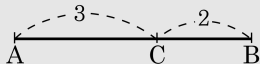
$$\therefore D/4 = 5^2 - (9 - 8k) = 0 \text{에서 } k = -2$$

25. 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $3 : 2$ 으로 내분하는 점을 C 라 할 때, 선분 AC 와 점 B 사이의 관계는?

- ① 점 B 는 선분 AC 를 $5 : 3$ 으로 외분하는 점이다.
- ② 점 B 는 선분 AC 를 $5 : 2$ 로 외분하는 점이다.
- ③ 점 B 는 선분 AC 를 $3 : 2$ 로 외분하는 점이다.
- ④ 점 B 는 선분 AC 를 $3 : 1$ 로 내분하는 점이다.
- ⑤ 점 B 는 선분 AC 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

해설

문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\overline{AC} : \overline{CB} = 3 : 2$ 이므로,

위의 그림에서 보듯이,

$\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 2$ 이다.

따라서 점 B 는 선분 $\overline{AC}$ 를 $5 : 2$ 으로 외분하는 점이다.