

1. 0이 아닌 실수  $x, y$  가  $(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$  을 만족할 때,  $x$  에 관한 이 방정식은 실수  $a$  에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. ( $a \neq 0$ )

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: -1

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4a^2) - 8axy = 0$  에서  
 $x^2y^2 + 4a^2x^2 + y^2 + 4a^2 - 8axy = 0$   
 $(x^2y^2 - 4axy + 4a^2) + (y^2 - 4axy + 4a^2x^2) = 0$   
 $(xy - 2a)^2 + (y - 2ax)^2 = 0$   
 $xy - 2a, y - 2ax$  는 실수이므로  
 $xy - 2a = 0, y - 2ax = 0$   
 $\therefore xy = 2a, y = 2ax$   
두 식을 연립하면,  $2ax^2 = 2a$   
( $a \neq 0$ ) 이므로  $x^2 = 1, x = \pm 1$

2. 다음 방정식을 만족하는 실수  $x, y$ 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -3

▷ 정답: 3

해설

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy \text{에서 } x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$$

이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때,  $x, y$ 가 실수이므로  $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

②에서  $y = 2x$ 이고, 이것을 ①에 대입하면  $x^2 = 1$

따라서,  $x = 1$ 일 때  $y = 2, x = -1$ 일 때  $y = -2$

그러므로  $x, y$ 의 값은  $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서  $x, y$ 의 합은  $-3, 3$

3. 방정식  $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수  $x, y$ 의 합  $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 0 \text{ 에서} \\(x+1)^2 + (y-2)^2 &= 0 \\x, y \text{ 는 실수이므로 } x &= -1, y = 2 \\ \therefore x+y &= -1+2 = 1\end{aligned}$$

4. 이차방정식  $2x^2 - 5x + k = 0$  의 근이 유리수가 되는  $k$ 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식  $D \geq 0$  이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$  곧,  $k \leq \frac{25}{8}$  이어야 한다.

$k$ 는 정수이므로  $k = 3, 2, 1, \dots$  이고,

이 중  $D \geq 0$  조건을 만족하는 최대 정수는  $k = 3$  이다.

5. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍  $(m, n)$ 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

- ① 1                      ② 2                      ③ 3  
④ 4                      ⑤ 5개 이상

해설

$$\begin{aligned} \frac{4}{m} + \frac{2}{n} &= 1 \\ (m-4)(n-2) &= 8 \\ 8 &= 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1 \text{ 이므로} \\ (m, n) &= (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3) \\ \therefore & 4\text{쌍의 } (m, n) \text{이 존재한다.} \end{aligned}$$

6. 방정식  $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ 일 때,  $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x-3)(y+2) = 4$$

$y+2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x-3 = 1, y+2 = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

7. 이차방정식  $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수  $a$ 에 대한 설명 중 옳은 것은?

①  $a$ 는  $-10$  이상  $-2$  이하이다.

②  $a$ 는  $-2$  이상  $6$  이하이다.

③  $a$ 는  $6$  이상이다.

④  $a$ 는  $0$  이하이다.

⑤  $a$ 는  $0$  이상  $8$  이하이다.

**해설**

두 정수근을  $\alpha, \beta$ 라 하면 (단,  $\beta \geq \alpha$ )

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서  $a$ 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

8. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 9      ② 10      ③ 11      ④ 12      ⑤ 13

해설

2점문항 개수를  $x$ , 3점문항을  $y$ ,  
4점문항을  $z$ 라 하자  
 $2x + 3y + 4z = 80 \cdots \textcircled{1}$   
 $x + y + z = 30 \cdots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1} - 4 \times \textcircled{2} \Rightarrow y = 40 - 2x$   
 $\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2} \Rightarrow z = x - 10$   
 $\therefore x = 10$ 이면  $z = 0$   
 $\Leftarrow$  조건이 성립하지 않음  
 $\therefore x \geq 11$ , 최소 11문항

9. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍  $(a, b)$ 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0개  
② 1개  
③ 2개  
④ 각각의  $b(\neq 0)$ 에 대하여 1개씩 있다.  
⑤ 각각의  $b(\neq 0)$ 에 대하여 2개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$   
 $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$  실수로서 이 등식을 만족하는 경우는  
 $a = 0, b = 0$ 뿐이다.  
따라서 0이 아닌 실수의 순서쌍  $(a, b)$ 는 없다.

10.  $x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수  $a$ 의 값을 구하면?

① -1

② 3

③ -1, -3

④ 1, 3

⑤ -3, 1

해설

정수근을 가지려면 일단은  $D \geq 0$  이어야 하므로  $D/4 = (a+2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$  에서  $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \dots$  ①

그런데  $a$ 는 정수이므로 ①에서  $a = 1, 2, 3$

i)  $a = 1$  일 때  $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은

$x = 2, 4$  (조건을 만족)

ii)  $a = 2$  일 때  $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은

$x = 4 \pm \sqrt{2}$  (조건에 위배)

iii)  $a = 3$  일 때  $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은

$x = 4, 6$  (조건을 만족)

i), ii), iii)에서  $a = 1, 3$

11.  $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ ,  $a + b + c = 4$  이 성립할 때,  $c$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단,  $a, b, c$ 는 실수)

- ㉠  $-\frac{8}{3}$     ㉡  $-\frac{4}{3}$     ㉢  $\frac{4}{3}$     ㉣  $\frac{8}{3}$     ㉤ 4

해설

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ \Rightarrow b &= 4 - (a + c) \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12 \\ \Rightarrow a^2 + c^2 + \{4 - (a + c)\}^2 &= 12 \\ a \text{에 대한 내림차순으로 정리하면} \\ a^2 + (c - 4)a + c^2 - 4c + 2 &= 0 \\ a, b, c \text{는 실수이므로 판별식이 } 0 \text{보다 크거나 같다.} \\ D = (c - 4)^2 - 4(c^2 - 4c + 2) &\geq 0 \\ \Rightarrow 3c^2 - 8c - 8 &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{4 - 2\sqrt{10}}{3} \leq c \leq \frac{4 + 2\sqrt{10}}{3} \\ \therefore (\text{최댓값} \times \text{최솟값}) \\ &= \left(\frac{4 - 2\sqrt{10}}{3}\right) \left(\frac{4 + 2\sqrt{10}}{3}\right) \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$



13.  $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수  $m$ 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라면

$$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면  $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$  ( $\alpha, \beta$ 는 정수)

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$m = -1, 7$$

14. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(I)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8      ② 9      ③ 10      ④ 11      ⑤ 12

**해설**

1점짜리 문항을  $x$ 개,  
1.5점짜리 문항을  $y$ 개,  
2점짜리 문항을  $z$ 개라고 하면  
 $x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \text{㉠}$   
 $x + y + z = 30 \cdots \text{㉡}$   
( $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ )라고 하면  
 $\text{㉠} \times 2 - \text{㉡} \times 3 = -x + z = -10,$   
 $x = z + 10, z \geq 1$ 이므로  
 $x = z + 10 \geq 11$   
이 때  $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로  
 $x$ 의 최솟값은 11

15.  $x, y, z$ 에 대한 다음 연립방정식의 근의 곱이 음의 정수이고, 합이 양의 정수일 때,  $x+y+z$ 의 최댓값을 구하면?

$$\begin{cases} 2x - y + z = a & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y + 2z = 3a - 11 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x - y + 2z = 2a - 2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

- ① 2      ② -2      ③ 3      ④  $\frac{3}{2}$       ⑤ -3

**해설**

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 에서  $3x - 4y = -a + 11$   
 $\textcircled{2} - \textcircled{3}$ 에서  $-2x + 3y = a - 9$   
 $\therefore x = a - 3, y = a - 5,$   
 $\textcircled{1}$ 에서  $z = 1$   
 $xyz = (a - 3)(a - 5) \cdot 1 < 0$   
 $\therefore 3 < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{A}$   
 $x + y + z = (a - 3) + (a - 5) + 1 = 2a - 7 > 0$   
 $\therefore a > \frac{7}{2} \cdots \cdots \textcircled{B}$   
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서  $\frac{7}{2} < a < 5 \cdots \cdots \textcircled{C}$   
 그런데  $x + y + z$ 는 정수이므로  $2a - 7$ 은 정수이고  $2a$ 도 정수이다.  
 $\textcircled{C}$ 에서  $7 < 2a < 10$   
 $\therefore 2a = 8$  또는  $9$ ( $\because 2a$ 는 정수)  
 $\therefore a = 4$  또는  $\frac{9}{2}$   
 $\therefore x = 1, y = -1, z = 1$  또는  $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$   
 $\therefore x + y + z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$