1. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$ ② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$ ④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6 \ \therefore\ Q(0,\ 6)$

2. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$ ② $C(3,\ 0)$ ③ $C(3,\ 4)$
④ $C(1,\ -1)$ ⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

3. 세 점 A(1, 4), B(−1, 2), C(4, a)가 일직선위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

세 점이 일직선 위에 있으면 기울기가 일치한다.

$$\frac{2-4}{-1-1}=\frac{a-2}{4-(-1)}$$

$\Rightarrow \quad \therefore\ a=7$

4. y절편이 3이고, 직선 $2x+y-1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-\frac{1}{2}x-3$ ③ $y=-x+3$

④ $y=\frac{1}{2}x-3$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
기울기의 곱이 -1일 때이다.
$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+3$이라면
$m\times(-2)=-1$, $\therefore\ m=\frac{1}{2}$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$

5. 다음 연립방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, k의 값은?

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+y=kx \end{cases}$$

① $\frac{5}{2}$　　② $-\frac{5}{2}$　　③ $\frac{3}{2}$　　④ $-\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x+2y=0 \cdots$ ㉠,
$3x+y=kx \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ × 2 하면 $(2k-5)x=0$
㉠ × $(3-k)$ − ㉡ 하면 $(2k-5)y=0$
따라서 $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
$x=y=0$
$k=\frac{5}{2}$ 일 때
㉠, ㉡는 $x+2y=0$ 이 되어 부정
(참고) $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
두 직선은 원점에서 만나고,
$k=\frac{5}{2}$ 일 때 두 직선은 모두
원점을 지나면서 일치한다.
결국 기울기가 같으면 되므로 처음부터
$-\frac{1}{2}=k-3$ 으로 해도 된다.

6. 두 직선 $x+y-4=0$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

7. 점 P$(1, 2)$ 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

= (점 P$(1,\ 2)$ 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

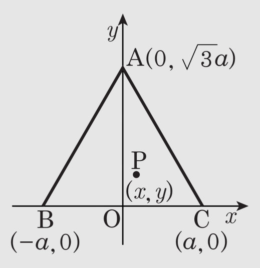
$\therefore \quad \overline{\mathrm{PH}} = \frac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

8. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P 의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분
④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC 의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C 의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

9. 두 점 A$(-5,\ 1)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$
④ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 P$(a,\ -a)$라 하면 ($\because\ y=-x$)
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$
$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$
$(a+5)^2+(a+1)^2=(a-4)^2+(a+5)^2$
$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

10. 두 점 $A(2, -1)$, $B(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$P(a, 0)$, $Q(0, b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle OPQ$의 외심을 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

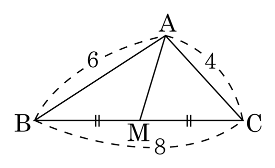
$\therefore\ -10x+25=0,\ -10y+25=0$

$\therefore\ x=y=\frac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

$\therefore\ x+y=5$

11. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

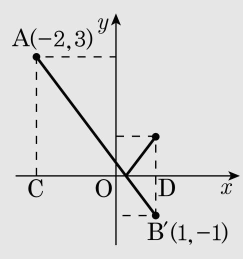
$36+16=2\overline{AM}^2+32$
$\therefore \overline{AM}^2=10$

12. 두 점 A(−2, 3), B(1, 1)와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

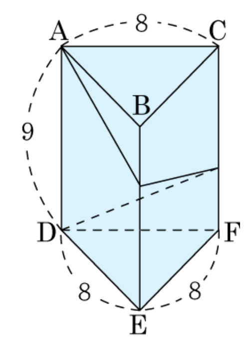
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 값이 최소가 되려면 점 B와 x축에 대한 대칭점을 B′ 이라 할 때, 세 점 A, P, B′ 이 한 직선 위에 있을 때이다. 그림에서처럼 점 B와 x축에 대한 대칭점은 B′(1, −1)이다.



그런데 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 것은 세 점 A, P, B′ 이 한 직선 위에 놓일 때이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$ 이다.

$$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}} = \sqrt{\{1-(-2)\}^2+\{(-1)-3\}^2} = \sqrt{3^2+4^2}=5$$

13. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

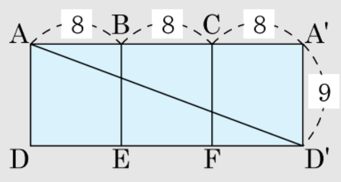


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



14. 길이가 36인 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 4 : 1로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

수직선 위에서

A(0), B(36) 이라 하고, C(x)라 하면

$x = \dfrac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3+1} = 27$

B(36), C(27)이므로 D(y)라 하면

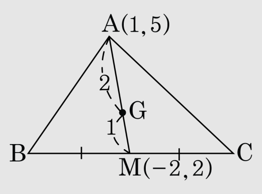
$y = \dfrac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4-1} = 24$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = 24$

15. $\triangle$ABC 에서 점 A(1, 5) 이고, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점의 좌표가 (−2, 2) 일 때, $\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표는?

① (−1, 3)　② (0, 2)　③ (1, 2)　④ (2, −3)　⑤ (2, 3)

해설



$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점을 M 이라 하고,
$\triangle$ABC 의 무게중심을 G 라 하면
G 는 $\overline{\mathrm{AM}}$ 을 2 : 1 로 내분하는 점이다.
즉, 무게중심 G 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

$$x=\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1}=-1$$

$$y=\frac{2\times2+1\times5}{2+1}=3$$

따라서 무게중심의 좌표는 (−1, 3) 이다.

16. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(5, 4)$에 대하여 조건 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$　② $x + 2y + 4 = 0$　③ $x + y + 3 = 0$
④ $x - 3y + 4 = 0$　⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고 주어진 조건
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$를 이용하여
$x,\ y$사이의 관계식을 구한다.
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓자.

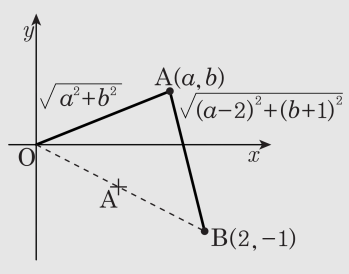
이때, $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$이므로
$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$
$8x + 8y - 40 = 0$
$\therefore x + y - 5 = 0$

17. 좌표평면 위에 점 O(0, 0), A(a, b), B(2, −1) 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고, $\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일직선상에 있을 때 최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은 $\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{5}$



18. 세 직선 $x+2y-3=0$, $3x+y-4-a=0$, $2x-3y-2a=0$ 이 한 점에서 만나도록 상수 a 의 값은?

① $a=-\frac{3}{5}$　② $a=-\frac{1}{3}$　③ $a=-\frac{5}{3}$
④ $a=\frac{5}{3}$　⑤ $a=5$

해설

두 직선의 교점이 다른 한 직선 위에 있으면 된다.

$x+2y-3=0 \quad \cdots$ ㉠
$3x+y-4-a=0 \cdots$ ㉡
$2x-3y-2a=0 \quad \cdots$ ㉢라하고,

㉡ $\times 3+$ ㉢ $\Leftrightarrow \therefore\ 11x-12-5a=0$

$\therefore\ x=\frac{5a+12}{11}$

㉡ $\times 2-$ ㉢ $\times 3 \Leftrightarrow \therefore\ 11y-8+4a=0$

$\therefore\ y=\frac{-4a+8}{11}$

$\therefore$ ㉡, ㉢의 교점의 좌표는 $\left(\frac{5a+12}{11}, \frac{-4a+8}{11}\right)$

이 점이 ㉠위에 있어야 하므로

$\frac{5a+12}{11}+2\,\frac{-4a+8}{11}-3=0$

즉, $\frac{5a+12-8a+16}{11}-3=0$

$-3a+28=33,\ 3a=-5 \quad \therefore\ a=-\frac{5}{3}$

19. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ 를 이은 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식은?

① $y = -2x - 5$　　② $y = -2x + 5$　　③ $y = 2(x - 5)$

④ $y = 2x + 1$　　⑤ $y = 2x - 1$

해설

선분 AB 의 기울기 : $\dfrac{2-4}{3-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 2 이다.

또, 선분 AB 의 수직이등분선은 두 점 A, B 의 중점을 지난다.

중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right) = (1,\ 3)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 3 = 2(x - 1)$

$\therefore\ y = 2x + 1$

20. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$　② $(1,\ 0)$　③ $(3,\ 1)$
④ $(-1,\ -3)$　⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.

21. 두 직선 $ax+by+1=0,\ bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

① $\frac{\sqrt{1}}{|a|}$　② $\frac{\sqrt{2}}{|a|}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{|a|}$　④ $\frac{2}{|a|}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\neq\frac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을 잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$ 이므로 직선 $bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의 거리는 $\frac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\frac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{|a|}$

22. 다음 두 직선 $3x+4y=21$, $3x+4y=11$ 사이의 거리를 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=21$ 의 점$(7,0)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|7\times 3+0\times 4-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

23. 점 (3, 4) 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

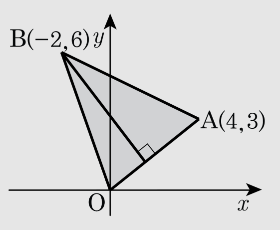
따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

24. 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(4,\ 3)$, $B(-2,\ 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9 ② 10 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의 방정식은 $y = \frac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과 직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3\times(-2) - 4\times 6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 6 = 15$

25. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다. Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다. Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고 하면
$\dfrac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\dfrac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

26. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

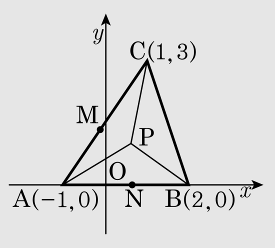
P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면
$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\dfrac{a+18}{1+3},\dfrac{b+6}{1+3}\right)$
$x=\dfrac{a+18}{1+3}$, $y=\dfrac{b+6}{1+3}$
$a=4x-18$, $b=4y-6$
㉠에 대입하면,
$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

27. 좌표평면 위에 세 점 A(−1, 0), B(2, 0), C(1, 3) 이 있다. $\triangle$ABC 의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle$ABC 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



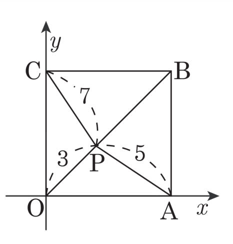
$\therefore\ \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

28. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{OP} = 3$, $\overline{AP} = 5$, $\overline{CP} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{PB} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{PB} = \sqrt{65}$

29. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AC}^2} = \overline{\mathrm{AB}^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

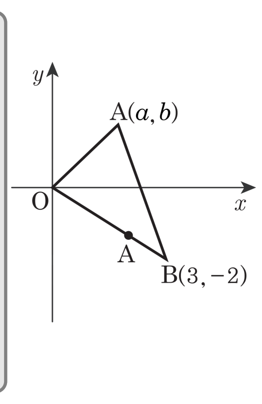
$a = -3$이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

30. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(a, b), B(3, −2)가 있다. 이 때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 의 최솟값은?

① 2　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{13}$

해설

$\sqrt{a^2+b^2}$ 은 $\overline{\mathrm{OA}}$ 의 길이이고
$\sqrt{(a-3)^2+(b+2)^2}$ 은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이이다.
따라서 준식은 세 점 O, A, B가 이 순서로 일직선상에 있을 때 최소가 되며 이 때 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OB}}$ 이다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$ 의 최솟값은
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 이다.



31. 두 점 $A(2,\ 5)$, $B(7,\ -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0<t<1$)

① $0<t<\frac{1}{3}$　② $0<t<\frac{3}{5}$　③ $0<t<\frac{5}{6}$
④ $\frac{3}{5}<t<1$　⑤ $\frac{3}{5}<t<\frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하므로

$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$

$\therefore\ P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5}<t<\frac{5}{6}$

이때, $0<t<1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$\therefore\ 0<t<\frac{5}{6}$

32. 세 꼭짓점이 $A(-1,\ -1)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m : n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle ABC$ 의 무게중심은
$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$
즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

33. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2,3)$, $(3,-1)$, $(5,4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1,8),(-4,-2),(10,2)$ ② $(0,8),(4,2),(10,0)$

③ $(-1,8),(4,2),(10,0)$ ④ $(-1,-8),(4,-2),(10,-2)$

⑤ $(0,8),(-4,-2),(10,0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 로 놓으면,

$\frac{x_1+x_2}{2}=-2$, $\frac{x_2+x_3}{2}=3$, $\frac{x_3+x_1}{2}=5$

$\therefore\ x_1+x_2=-4,\quad x_2+x_3=6,\quad x_3+x_1=10$

$\therefore\ x_1=0,\quad x_2=-4,\quad x_3=10$

$\frac{y_1+y_2}{2}=3$, $\frac{y_2+y_3}{2}=-1$, $\frac{y_3+y_1}{2}=4$

$\therefore\ y_1+y_2=6,\quad y_2+y_3=-2,\quad y_3+y_1=8$

$\therefore\ y_1=8,\quad y_2=-2,\quad y_3=0$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

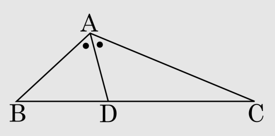
$(0,8),(-4,-2),(10,0)$ 이다.

34. 세 점 A$(-2,\ 0)$, B$(-1,\ \sqrt{3})$, C$(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle$ABD 와 $\triangle$ACD 의 넓이의 비는?

① $1:2$ ② $1:3$ ③ $1:4$ ④ $2:3$ ⑤ $2:5$

해설

점 D 가 $\angle$A 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{\text{BD}} : \overline{\text{DC}} = \overline{\text{AB}} : \overline{\text{AC}} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2:5$
$\therefore\ \triangle\text{ABD} : \triangle\text{ACD} = \overline{\text{BD}} : \overline{\text{DC}} = 2:5$



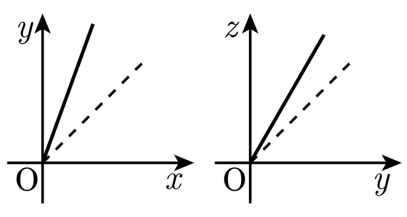
35. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$ ② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$ ④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

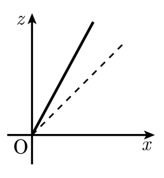
해설

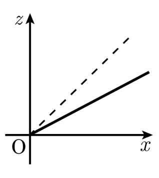
직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0$ ⋯ ①
$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2$ ⋯ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$

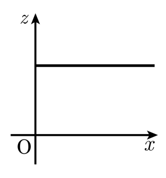
36. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

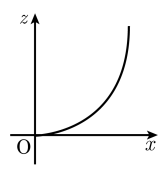


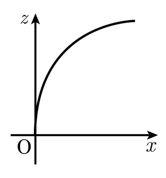
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

37. 네 점 A$(-2,\ 0)$, B$(2,\ 0)$, C$(2,\ 3)$, D$(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

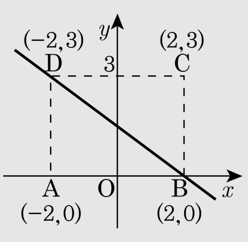
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx+y-2m=0$

즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 B$(2,\ 0)$을 지난다.

이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D$(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, D$(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$