1. 연립부등식 $\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ＿＿개

▷ 정답: 5개

해설

$$\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6 > x \\ x-1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > -2 \\ x < 4 \end{cases}$$

따라서 $-2 < x < 4$이므로 연립방정식을 만족하는 정수는 $-1, 0, 1, 2, 3$으로 5 개 이다.

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-11<5x+7 \\ 3(x-1)\le 4(2-x)+2 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 A , 가장 작은 정수를 B 라 할 때, $A+B$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

i) $2x-11<5x+7$

$\Rightarrow \ x>-6$

ii) $3(x-1)\le 4(2-x)+2$

$\Rightarrow \ 3x-3\le 8-4x+2$

$\Rightarrow \ 3x+4x\le 10+3$

$\Rightarrow \ x\le \dfrac{13}{7}$

$-6<x\le \dfrac{13}{7}$ 이므로

$A=1,\ B=-5$

$\therefore A+B=1+(-5)=-4$

3. 두 부등식 $3(x-10) < -x+5$, $\dfrac{x-12}{4} \le \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{7}{12}$ 를 동시에 만족하는 해는?

① $-35 < x \le \dfrac{35}{4}$ ② $-35 \le x < \dfrac{35}{4}$ ③ $-30 < x \le \dfrac{35}{4}$

④ $-30 < x \le 35$ ⑤ $-25 < x \le 35$

해설

i) $3(x-10) < -x+5$

$3x-30 < -x+5$

$x < \dfrac{35}{4}$

ii) $\dfrac{x-12}{4} \le \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{7}{12}$ 의 양변에 12 를 곱하면

$3(x-12) \le 4(x-2)+7$

$3x-36 \le 4x-8+7$

$x \ge -35$

$\therefore -35 \le x < \dfrac{35}{4}$

4. x의 범위가 -1, 0, 1, 2일 때, 다음 부등식 중 해가 <u>없는</u> 것은?

① $2x < -4$ ② $x + 3 < 4$ ③ $3x - 2 \leq 1$

④ $-x + 6 \geq 7$ ⑤ $2x - 3 \geq -1$

해설

① $x < -2$

② $x < 1$

③ $x \leq 1$

④ $x \leq -1$

⑤ $x \geq 1$

5. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

② $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $2 \leq x \leq 3$

③ $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

④ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

⑤ $-2 \leq x \leq 1$ 또는 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \leq 0$

$-2 \leq x \leq 3$

㉡ $(2x-3)(2x-1) \geq 0$

$x \geq \frac{3}{2}, \quad x \leq \frac{1}{2}$

㉠과 ㉡의 공통범위 :

$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 3$

6. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a > b,\ c < 0$일 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면 몇 개인가?

(1) $ac < bc$	(2) $a^2 > b^2$	(3) $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$
(4) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$	(5) $a^3 > b^3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

(1) $a > b,\ ac < bc \Rightarrow (\ \bigcirc\ )$

(2) (반례) $a = 1,\ b = -2$

$1 > -2,\ (1)^2 < (-2)^2 \Rightarrow (\ \times\ )$

(3) $a > b,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \Rightarrow (\ \bigcirc\ )$

(4) (반례) $1 > -2,\ \ 1 > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (\ \times\ )$

(5) $a^3 > b^3 \Rightarrow (\ \bigcirc\ )$

$\therefore$참 : (1), (3), (5)

7. $|x+1|<4$, $2<y<4$일 때, $\dfrac{x}{y}$의 범위는?

① $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{5}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{4}$

해설

$|x+1|<4$

$\Rightarrow \quad -4<x+1<4$

$\Rightarrow \quad -5<x<3, \quad 2<y<4$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$의 최댓값 : $\dfrac{3}{2}$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$의 최솟값 : $-\dfrac{5}{2}$

$\therefore \quad -\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$

8. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \quad b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

9. 부등식 $|x+1|+|x-2|+1<x+4$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|+1<x+4$

i) $x<-1$

$-x-1-x+2+1<x+4,\ x>-\dfrac{2}{3}$

공통범위 없음

ii) $-1\le x<2$

$x+1-x+2+1<x+4,\ x>0$

공통범위 : $0<x<2 \to$ 정수 : 1

iii) $x\ge 2$

$x+1+x-2+1<x+4,\ x<4$

공통범위 : $2\le x<4 \to$ 정수$=2,\ 3$

$\therefore$ 정수 x의 개수 : 1, 2, 3으로 3개

10. 부등식 $|x+1|<1+|2-x|$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<1$

해설

$|x+1|<1+|2-x|$ 에서

ⅰ) $x<-1$ 일 때,

$-(x+1)<1+(2-x)$

$\therefore -1<3$ 이므로 성립

$\therefore \ x<-1$

ⅱ) $-1\le x<2$ 일 때,

$x+1<1+2-x$

$\therefore \ 2x<2$

$\therefore \ x<1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1\le x<1$

ⅲ) $x\ge 2$ 일 때,

$x+1<1-(2-x)$

$\therefore \ 1<-1$ 이므로 모순

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 구하는 부등식의 해는 $x<1$

11. 부등식 $|-x+3|+|2x-3| \le 6$의 해가 $\alpha \ge x \ge \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -4　② 0　③ 6　④ 12　⑤ 16

해설

$|-x+3|+|2x-3| \le 6$

i) $x \le \dfrac{3}{2}$

$-x+3-2x+3 \le 6, \quad x \ge 0$

$\therefore \ 0 \le x \le \dfrac{3}{2}$

ii) $\dfrac{3}{2} < x \le 3$

$-x+3+2x-3 \le 6, \quad x \le 6$

$\therefore \dfrac{3}{2} < x \le 3$

iii) $x > 3$

$x-3+2x-3 \le 6, \quad x \le 4$

$\therefore 3 < x \le 4$

$\therefore \ 0 \le x \le 4, \ \alpha\beta = 0$

12. 부등식 $|x-k| \leq 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \leq 3$에서 $-3 \leq x-k \leq 3$,

$-3+k \leq x \leq 3+k$

따라서 x의 최댓값은 $3+k$,

최솟값은 $-3+k$이므로

$(-3+k)(3+k)=9$

$k^2-9=9$

$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$

k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

13. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$일 때, 부등식 $4cx^2 - 2bx + a > 0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구하면?

① $-7 < x < -5$ ② $-5 < x < -3$ ③ $-3 < x < -1$

④ $5 < x < 7$ ⑤ $7 < x < 9$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$의 해가

$\frac{1}{14} < x < \frac{1}{10}$이므로 $a < 0$

$\left(x - \frac{1}{14}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right) < 0$에서

$(14x - 1)(10x - 1) < 0$

$\therefore\ -140x^2 + 24x - 1 > 0$

$a = -140k,\ b = 24k,\ c = -k$라 놓고

(단, $k > 0 \leftarrow a < 0$)

$4cx^2 - 2bx + a > 0$에 대입하면

$-4kx^2 - 2 \cdot 24kx - 140k > 0$

$x^2 + 12x + 35 < 0$

$\therefore\ (x + 7)(x + 5) < 0 \quad \therefore -7 < x < -5$

14. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$

$f(4x-1)$는 $f(x)$의 x대신 $4x-1$를 대입한 것과 같으므로

$f(4x-1)=k(4x-1-\alpha)(4x-1-\beta)=0$의 근은

$$x=\frac{\alpha+1}{4},\ \frac{\beta+1}{4}$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α,β라 하면

$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$

$f(4x-1)=0$에서

$4x-1=\alpha,\ 4x-1=\beta$

$$\therefore\ x=\frac{\alpha+1}{4},\ x=\frac{\beta+1}{4},$$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{\alpha+1+\beta+1}{4}=\dfrac{6+2}{4}=2$

15. 부등식 $\frac{1}{2}x-\frac{4}{3} \le x-\frac{x+2}{3} \le \frac{1}{4}x+6$을 만족하는 음이 아닌 정수 x의 값의 개수는?

① 18개 ② 17개 ③ 16개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

i) $\frac{1}{2}x-\frac{4}{3} \le x-\frac{x+2}{3}$, $3x-8 \le 6x-2x-4$

$\therefore\ x \ge -4$

ii) $x-\frac{x+2}{3} \le \frac{1}{4}x+6$, $12x-4x-8 \le 3x+72$

$\therefore\ x \le 16$

i), ii)에서 공통된 x의 값의 범위를 구하면

$-4 \le x \le 16$

한편, x는 음이 아닌 정수이므로 $0 \le x \le 16$

따라서 $x=0, 1, 2, \cdots, 16$의 17개이다.

16. 연립부등식 $-1.2 < \dfrac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$-1.2 < \dfrac{2x-a}{6} < -x$

$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{a-7.2}{2} \\ x < \dfrac{a}{8} \end{cases}$

$\dfrac{a-7.2}{2} < x < \dfrac{a}{8}$ 가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-7.2}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5a-36 &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = 8$

$\therefore\ b = \dfrac{a}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

17. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0 \le a \le 2$ ③ $a<0,\ a>2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

18. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\dfrac{7}{2}$ ② $3 \le x \le 4$ ③ $3 \le x < 4$

④ $3 < x \le 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k \ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k \quad\ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

따라서, $[x]+(x)=7$ 이고

$[x]$, (x) 는 정수이므로

$[x]=3,\ (x)=4\ (\because\ \ [x] \le (x))$

$\therefore\ 3 < x < 4$

19. 부등식 $x^2-3<x+\sqrt{4x^2+4x+1}$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -1　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2-3<x+|2x+1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x+2x+1,\ x^2-3x-4<0$

$(x-4)(x+1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \leq x < 4$

(ii) $x<-\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x-(2x+1),\ x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-2<x<4$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=4$

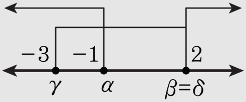
$\therefore\ \alpha+\beta=2$

20. 두 부등식 $x^2+ax+b \geq 0$, $x^2+cx+d \leq 0$을 동시에 만족하는 x의 범위가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$라고 한다.
이 때 $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -6 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -3

해설

$x^2+ax+b \geq 0$의 해를 $x \leq \alpha$, $x \geq \beta$
$x^2+cx+d \leq 0$의 해를 $\gamma \leq x \leq \delta$라고 하면



공통의 해가 $-3 \leq x \leq -1$ 또는 $x=2$이려면
다음 그림에서와 같이 $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$, $\delta=2$이어야 한다.
$\therefore\ x^2+ax+b=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$이므로 $a=-1$, $b=-2$
$x^2+cx+d=(x+3)(x-2)=x^2+x-6$이므로 $c=1$, $d=-6$
따라서 $a+b+c+d=-1+(-2)+1+(-6)=-8$

21. 어떤 공장에서 벨트와 신발을 만드는 데 드는 비용과 판매가는 다음과 같다.

	재료비(원)	가공비(원)	판매가(원)
벨트	5000	3000	10000
신발	4000	7000	15000

하루에 만드는 벨트와 신발의 개수의 합이 250 개이고, 재료비는 140 만원 이하, 가공비는 115 만원 이하가 되게 하려고 한다. 하루에 만든 벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대 판매금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 3000000 원

해설

벨트의 개수를 x 개라 하고 신발의 개수를 y 개라 하면, $x+y=250$, $y=250-x$

재료비는 140 만원 이하이므로

$5000x+4000y \le 1400000$,

$5x+4(250-x) \le 1400 \cdots ㉠$

가공비는 115 만원 이하이므로

$3000x+7000y \le 1150000$,

$3x+7(250-x) \le 1150 \cdots ㉡$

㉠ 을 풀면 $x \le 400$

㉡ 을 풀면 $x \ge 150$

$\therefore\ 150 \le x \le 400$

벨트와 신발을 모두 팔았을 때, 최대한 많은 금액을 받으려면, 신발을 많이 판매해야 하고 벨트는 적게 판매해야 한다.

따라서 $x=150$, $y=250-150=100$ 일 때,

최대 판매 금액은 $150 \times 10000 + 100 \times 15000 = 3000000$ (원) 이다.

22. 가위로 어떤 볼록사각형의 대각선을 따라 잘랐더니 세 변의 길이가 각각 4, 5, y 인 삼각형 A 와 12, y, x 인 삼각형 B 가 만들어졌다. 삼각형 A 의 변의 길이 중 y 가 가장 길고, 삼각형 B 의 변의 길이 중 y 가 가장 짧을 때, x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 21$

해설

삼각형 A 에서 $y < 4 + 5$, 즉 $y < 9$
삼각형 B 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < y + 12$
그런데 $y < 9$ 이므로 $x < y + 12 < 9 + 12$
$\therefore\ x < 21$
2) 12 가 가장 긴 변인 경우 : $12 < x + y$
그런데 $y < 9$ 이므로 $12 < x + y < x + 9$
$\therefore\ x > 3$
따라서 1), 2) 에 의해서 $3 < x < 21$ 이다.

23. 전자사전을 사기 위해 x 일 동안 한달에 20000 원씩 모으면 11000 원이 남고, 한달에 18000 원씩 모으면 9000 원 미만이 부족하다. x 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

전자사전을 사기 위해 필요한 돈은 $(20000x - 11000)$ 원이므로

$18000x < (20000x - 11000) < 18000x + 9000$

각 변에서 $18000x$ 를 빼면

$0 < 2000x - 11000 < 9000$

$\therefore 5.5 < x < 10$

따라서 x 의 최댓값은 9 이다.

24. 9 시에 문을 여는 극장에 8 시 30 분부터 1 분에 10 명씩 사람들이 몰려와 줄을 서기 시작하고, 이후에도 계속 시간당 같은 인원이 꾸준히 극장에 온다. 9 시부터 3 개의 표 발매 창구에서 표를 팔면 9 시 15 분에 줄 서 있는 사람이 없어질 것으로 예상된다. 이때, 줄 서 있는 사람이 없어지는 시간을 7 분 앞당기려면 발매 창구를 최소 몇 개 더 열어야 하는지 구하여라. (단, 창구 하나당 발매하는 표의 수는 모두 같다.)

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 2 개

해설

9 시에 발매를 시작하기 전에 이미 줄 서 있는 사람 수가 $30\times10 = 300$ (명) 이고

1 분 동안 발매하는 표가 x 장이라고 하면

3 개의 발매 창구에서 표를 팔면 15 분 동안 모두 판매하므로

$3\times15x = 300 + 15\times10 \quad 45x = 450 \qquad \therefore x = 10$,

한편 모두 판매하는 시간을 7 분 앞당기면 8 분 동안 모두 판매해야 하므로

발매 창구의 개수를 a 개라 하면

$a\times10\times8 \geq 300 + 10\times8, 80a \geq 380$

$\therefore a \geq \dfrac{19}{4}$

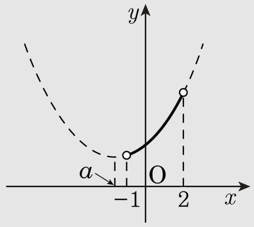
따라서 발매창구가 적어도 5 개 있어야 하므로 최소 2 개의 발매 창구를 더 열어야 한다.

25. $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

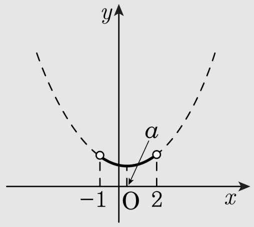
① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

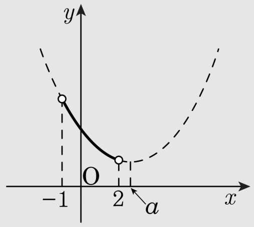
$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이라 하면
$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 3$



$-1 < x < 2$ 에서
부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면
(i) $a < -1$ 일 때,
다음 그림에서 $f(-1) > 0$
$4a + 4 > 0 \quad \therefore \ a > -1$
그런데 $a < -1$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.
(ii) $-1 \le a < 2$ 일 때,



다음 그림에서 $f(a) > 0$
$-a^2 + 2a + 3 > 0$ 에서
$(a+1)(a-3) < 0$
$\therefore \ -1 < a < 3$
그런데 $-1 \le a < 2$ 이므로 $-1 < a < 2$
그런데 $a = -1$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이어도
$-1 < x < 2$ 에서는 $f(x) > 0$ 이므로 성립한다.
따라서 $-1 \le a < 2$



(iii) $a \ge 2$ 일 때, 다음 그림에서

$f(2) > 0 \ -2a + 7 > 0 \quad \therefore \ a < \dfrac{7}{2}$

그런데 $a \ge 2$ 이므로 $2 \le a < \dfrac{7}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는

$-1 \le a < \dfrac{7}{2}$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5개다.