1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 아닌 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

2. $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3 + \overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3 = 1,\ \overline{\omega}^3 = 1,\ \omega^3 + \overline{\omega}^3 = 2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

4. $5-3x>8$, $2x+3\geq -5$ 을 만족하는 x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$5-3x>8 \Rightarrow x<-1$

$2x+3\geq -5 \Rightarrow x\geq -4$

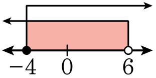
$\therefore -4\leq x<-1$

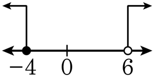
따라서 이를 만족하는 가장 큰 정수는 -2 이다.

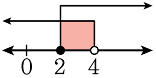
5. 연립부등식

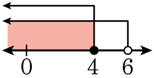
$$\begin{cases} 2(x-3) < x \\ x+5 \le 3(x-1) \end{cases}$$

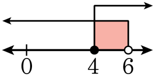
의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

1. $2(x-3) < x,\ \ x < 6$
2. $x+5 \le 3(x-1),\ \ x \ge 4$

공통된 해를 찾으면 $4 \le x < 6$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 모두 몇 개인가?

① 9 개 ② 8 개 ③ 7 개 ④ 6 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} 0.3x - 0.5 \le 0.4 \\ x - 3 > -2(9 + x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x \le 9 \\ 3x > -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x > -5 \end{cases}$$

$\therefore\ -5 < x \le 3$

위의 범위를 만족하는 정수는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이다.

7. 부등식 $2|x+2|+|x-1| \leq 6$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

(i) $x \geq 1$일 때

$2x+4+x-1-6=3x-3 \leq 0,\ x \leq 1$

$\therefore x=1 \cdots$ ㉠

(ii) $-2 \leq x < 1$일 때

$2x+4+1-x-6=x-1 \leq 0$에서 $x \leq 1$

$\therefore -2 \leq x < 1 \cdots$ ㉡

(iii) $x < -2$일 때

$-2x-4-x+1-6=-3x-9 \leq 0$

$3x \geq -9,\ \ x \geq -3$

$\therefore -3 \leq x < -2 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-3 \leq x \leq 1$

따라서 만족하는 정수 x의 개수는 5개

8. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$의 해를 구하면?

① $x \geq 3$ 또는 $x \leq -3$

② x는 모든 실수

③ $x \neq 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$

$(x-3)^2 \leq 0$

$\Rightarrow x = 3$

9. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 <u>아닌</u> 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

10. x에 관한 삼차방정식 $2x^3+ax^2-bx+3=0$ 의 한 근이 1이고, $a+b+1=0$일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3 ② $-1,\ 2$ ③ $-1,\ 3$

④ $-1,\ \frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2},\ 3$

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$2+a-b+3=0,\ a-b=-5$

주어진 조건인 $a+b+1=0$과 연립하여 풀면

$a=-3,\ \ b=2$

$\therefore\ 2x^3-3x^2-2x+3=0$

$(x-1)(2x^2-x-3)=0$

$(x-1)(2x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=1,\ \frac{3}{2},\ -1$

11. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$이 중근을 가질 때, 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$(x-1)(x^2-ax+2a)=0$에서

ⅰ) 1이 중근일 경우

$x^2-ax+2a=0$에 $x=1$을 대입하면 성립해야 하므로

$1-a+2a=0$, $a=-1$

ⅱ) 1이 중근이 아닌 경우

$x^2-ax+2a=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=0$에서

$D=a^2-8a=0,\ a(a-8)=0,\ a=0,8$

$\therefore\ 0+8-1=7$

12. $1-\sqrt{2}$ 가 방정식 $2x^2+px+q=0$의 해이고 유리수 p, q가 $x^3+ax^2+2x+b=0$ 의 해 일 때 b의 값은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -6 ⑤ -8

해설

유리수 계수의 이차방정식이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 이면
다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$ 이다.
두 근의 합은 2
두 근의 곱은 -1
$\therefore\ p=-4,\quad q=-2$ ($\because$ 근과 계수의 관계를 이용)
$p=-4,\ q=-2$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면
$-64+16a-8+b=0,\ -8+4a-4+b=0$ 연립하여 풀면
$a=5,\quad b=-8$

13. x에 관한 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+4=0$의 세 근을 α,β,γ라고 할 때 $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=-4$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+2+4=4$

14. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^3+ax^2+bx+5=0$ 의 세 근 : $2-i,\ 2+i,\ \alpha$

세 근의 합 : $-a=4+\alpha\cdots$ ①

세 근의 곱 : $-5=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$

$\therefore \alpha=-1$, ①식에 대입하면 $a=-3$

$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\cdot(-1)+(2-i)\cdot(-1)=5-4=1$

$\therefore a^2+b^2=10$

15. $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$를 만족하는 실수 a, b를 구하면?

① $a = -1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = -3$ ③ $a = -3,\ b = 1$

④ $a = -1,\ b = 1$ ⑤ $a = 1,\ b = 2$

해설

$x^3 - 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근이 w이다.

$\therefore\ w^3 = 1,\ w^2 + w + 1 = 0$

$\Rightarrow\ \ w^2 = -w - 1$

$\therefore\ 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$

$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$

$= 1 + 2w + 3(-w-1) + 4$

$= -w + 2$

$\therefore\ -w + 2 = aw + b$

$a,\ b$는 실수이고, w는 허수이므로

$a = -1,\ b = 2$

16. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면? (단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ -3 ⑤ -5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은

$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2+\omega+1=0,$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$

$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$

$$\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$$

$$=\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$$

$$=-2+\frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$$

$$=-2-\frac{3}{1}=-5$$

17. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{5}{3}$　　⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0,\ (x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0,\ -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

19. 연립방정식 $xy=z$, $yz=x$, $zx=y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2=xyz$
$xyz\neq 0$ 이므로 $xyz=1$
여기에 $xy=z$를 대입하면 $z^2=1$, $z=\pm 1$
(i) $z=1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,
$xy=1$, $x=y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$
(ii) $z=-1$을 주어진 연립방정식에 대입하면
$xy=-1$, $x=-y$
$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$
(i), (ii) 에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

20. x에 대한 부등식 $ax+b<0$의 해가 $x>-1$일 때, 부등식 $(a+b)x+3a-b>0$의 해를 구하면?

① $x>-1$ ② $x<-1$ ③ $x>-3$

④ $x<-3$ ⑤ $x<5$

해설

$ax+b<0$

$ax<-b$

해가 $x>-1$이므로 $a<0$

$x>-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \quad -\frac{b}{a}=-1 \quad \Rightarrow \quad a=b$

$(a+b)x+3a-b>0$

$2ax+2a>0$

$2ax>-2a$

$x<-1$ $(\because \ a<0)$

21. 연립부등식 $-4+5x<3x-7\le 4x+1$을 만족하는 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

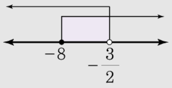
▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$-4+5x<3x-7\le 4x+1$

$$\rightarrow \begin{cases} -4+5x<3x-7 \\ 3x-7\le 4x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{3}{2} \\ x\ge -8 \end{cases}$$



가장 큰 정수 : -2

가장 작은 정수 : -8

$\therefore\ (-2)+(-8)=-10$

22. 연립부등식 $\begin{cases} 4x-1<3x+5 \\ 6x+a \le 7x+1 \end{cases}$ 을 동시에 만족하는 정수의 개수가 2개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

▶ 답 :

▷ 정답 : $4<a\le 5$

해설

$4x-1<3x+5$ 를 풀면 $x<6$ 이고, $6x+a\le 7x+1$ 을 풀면 $a-1\le x$ 이다.
따라서 $a-1\le x<6$ 을 만족하는 정수의 개수가 2개이기 위해서 $3<a-1\le 4$, 따라서 $4<a\le 5$ 이다.

23. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값은?

$$\begin{cases} 7x+4>5x \\ 15-x>a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6

④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x+4>5x \qquad \therefore\ x>-2$

$15-x>a \qquad \therefore\ x<15-a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8<15-a\le 9$

$6\le a<7$

$\therefore\ a=6$

24. 다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $\begin{cases} 3x-2 \le -2(x-4) \\ -(x-5) \le x+1 \end{cases}$

㉡ $\begin{cases} x-3 \ge 2x+1 \\ 6x-1 > 2x+11 \end{cases}$

㉢ $\begin{cases} -x-5 < 3x+7 \\ \frac{1}{2}x+3 > \frac{2x-2}{3} \end{cases}$

㉣ $\begin{cases} 2(x+1) < x-6 \\ 2x-4 < 5(x-2) \end{cases}$

㉤ $2x-3 \le 3x+1 < x+9$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉣

해설

㉡ $\begin{cases} x-3 \ge 2x+1 & \therefore x \le -4 \\ 6x-1 > 2x+11 & \therefore x > 3 \end{cases}$

$\therefore\ x \le -4,\ x > 3$ (해가 없다.)

㉣ $\begin{cases} 2(x+1) < x-6\text{에서 } 2x+2 < x-6 \\ \therefore\ x < -8 \\ 2x-4 < 5(x-2)\text{에서 } 2x-4 < 5x-10 \\ \therefore\ 2 < x \end{cases}$

$\therefore\ x < -8,\ x > 2$ (해가 없다.)

㉠ $\begin{cases} 3x-2 \le -2(x-4)\text{에서 } 5x \le 10 \ \therefore\ x \le 2 \\ -(x-5) \le x+1\text{에서 } 4 \le 2x \ \therefore\ 2 \le x \end{cases}$

$\therefore\ x = 2$

㉢ $\begin{cases} -x-5 < 3x+7 & \therefore\ x > -3 \\ \frac{1}{2}x+3 > \frac{2x-2}{3}\text{에서 } 3x+18 > 2(2x-2) \\ \therefore\ x < 22 \end{cases}$

$\therefore\ -3 < x < 22$

㉤ $\begin{cases} 2x-3 \le 3x+1 & \therefore x \ge -4 \\ 3x+1 < x+9 & \therefore\ x < 4 \end{cases}$

$\therefore\ -4 \le x < 4$

25. 연립부등식 $\begin{cases} -x+3>x-5 \\ 2x-1 \geq a \end{cases}$ 의 해가 $-3 \leq x < 4$ 일 때, a 의 값은?

① -8 ② -7 ③ -5 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-x+3>x-5$

$\therefore \; x<4$

$2x-1 \geq a$

$x \geq \dfrac{a+1}{2}$

$\dfrac{a+1}{2}=-3, \; a+1=-6$

$\therefore \; a=-7$

26. 어떤 정수의 3 배에서 16 을 더하면 1 보다 크고, 이 정수의 4 배에서 5 를 빼면 −13 보다 작다. 이 때, 이러한 정수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

▷ 정답 : -3

해설

$$\begin{cases} 3x + 16 > 1 \\ 4x - 5 < -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x > -15 \\ 4x < -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < -2 \end{cases}$$

따라서 $-5 < x < -2$ 를 만족하는 정수는 -4, -3 이다.

27. 1 개에 2,000 원 하는 햄버거와 1 개에 3,000 원 하는 샌드위치를 합쳐서 25 개를 사려고 한다. 전체 가격이 60,000 원 이상 68,000 원 이하가 되게 하려고 한다. 다음 중 살 수 있는 햄버거의 개수가 아닌 것은?

① 9 개 ② 12 개 ③ 13 개 ④ 14 개 ⑤ 17 개

해설

햄버거의 수를 x 개라고 하면 샌드위치의 수는 $(25-x)$ 개 이다. 따라서 햄버거를 x 개 사고 샌드위치를 $25-x$ 개 샀을 때의 전체 가격은 $2000x+3000(25-x)$ 이다. 전체 가격이 60,000 원 이상 68,000 원 이하가 되므로 식으로 나타내면, $60000 \le 2000x+3000(25-x) \le 68000$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면,

$$\begin{cases} 2000x+3000(25-x) \ge 60000 \\ 2000x+3000(25-x) \le 68000 \end{cases}$$ 이므로 간단히 하면,

$$\begin{cases} x \le 15 \\ x \ge 7 \end{cases}$$ 이다.

따라서 $7 \le x \le 15$ 이다.

따라서 살 수 있는 햄버거의 개수는 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 개이다.

28. 민수는 각각 a, $a+2$, $a+4$ 인 막대로 삼각형을 만들려고 한다. 민수가 삼각형을 만들 수 있는 a 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a + 4 < a + (a + 2)$ 이고 정리하면 $a > 2$ 이다.

29. 4% 소금물 $300\,\mathrm{g}$ 과 9% 의 소금물을 섞어서 7% 이상의 소금물을 만들었다. 이 때, 9% 의 소금물은 몇 g 이상 섞었는지 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : $450\,\mathrm{g}$

해설

9%의 소금물의 양을 $x\,\mathrm{g}$이라 하면

$$\frac{4}{100}\times 300+\frac{9}{100}\times x \geq \frac{7}{100}\times(300+x)$$

$$1200+9x \geq 2100+7x$$

$$9x-7x \geq 2100-1200$$

$$\therefore\ x \geq 450$$

30. 세 함수 $f(x) = -x^2 + x - 2$, $g(x) = ax + a$, $h(x) = x^2 + 4x + 4$ 가 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) \le g(x) < h(x)$ 를 만족할 때, a 의 정수값은 몇 개 있는가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

(i) $f(x) \le g(x)$ 에서 $-x^2 + x - 2 \le ax + a$,

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a + 2 \ge 0$

$D = (a-1)^2 - 4(a+2) = a^2 - 6a - 7 \le 0$

$\therefore\ -1 \le a \le 7$

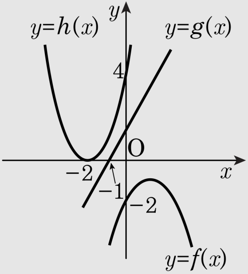
(ii) $g(x) < h(x)$ 에서 $ax + a < x^2 + 4x + 4$

$\therefore\ x^2 + (4-a)x + 4 - a > 0$

$D = (4-a)^2 - 4(4-a) = a^2 - 4a < 0$

$\therefore\ 0 < a < 4$

(i)과 (ii) 로부터 $0 < a < 4$ 이고 정수는 3개



31. 이차부등식 $x^2+x-k\le 0$ 의 해가 $-2\le x\le 1$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

해가 $-2\le x\le 1$ 이고,
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x-1)\le 0,\ x^2+x-2\le 0$
$\therefore k=2$

32. x의 이차방정식 $mx^2+2(1-2m)x+m=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0<m<\frac{1}{3}$

② $m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

③ $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

④ $m<0\ ,\ m>1$

⑤ $\frac{1}{3}<m<1$

해설

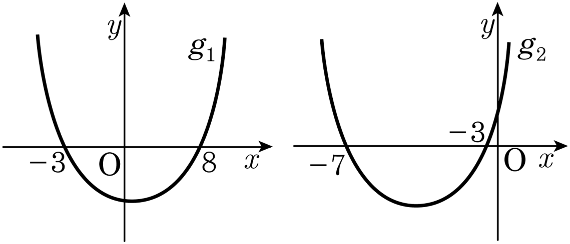
이차방정식이므로 $m\neq 0$ $\cdots$㉠

$\frac{D}{4}=(1-2m)^2-m^2>0$에서

$(m-1)(3m-1)>0,\ \ m<\frac{1}{3},\ \ m>1$ $\cdots$㉡

㉠,㉡에서 $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

33. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

34. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해는 몇 개인가?

① 7 개　② 6 개　③ 5 개　④ 4 개　⑤ 3 개

해설

$x^2 - x - 6 \le 0$

$\Rightarrow \ (x-3)(x+2) \le 0$

$\Rightarrow \ -2 \le x \le 3 \quad \cdots \quad$ ①

$x^2 - 5x + 4 > 0$

$\Rightarrow \ (x-1)(x-4) > 0$

$\Rightarrow \ x < 1$ 또는 $x > 4 \quad \cdots \quad$ ②

①, ②의 공통범위는 : $-2 \le x < 1$

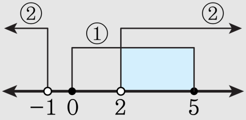
$\therefore$ 정수의 해 : $-2, \ -1, \ 0$

35. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$

$\therefore 0 \leq x \leq 5 \cdots\cdots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \leq 5$ 이므로 a의 값은 2이다.

36. $n,\ n+5,\ n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?

① 4　② 6　③ 7

④ 9　⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서

$n+(n+5)>n+8,\ n>3 \cdots\cdots$ ㉠

둔각삼각형일 조건에서 $n^2+(n+5)^2<(n+8)^2$

$n^2-6n-39<0$, $3-\sqrt{48}<n<3+\sqrt{48} \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 자연수인 n 은

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ (6 개)

37. x에 관한 이차방정식 $x^2-ax+9=0$이 $x<1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-6$

해설

$f(x)=x^2-ax+9$라 놓으면

i) 축이 $x<1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a<1$, $a<2$

ii) $f(1)>0$, $1-a+9>0$, $a<10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D}=a^2-4\cdot 9\ge 0$, $a\ge 6$, $a\le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a\le -6$

$\therefore k=-6$

38. 이차방정식 $x^2-2(m-4)x+2m=0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

보기

(ⅰ) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ⅱ) 2가 두 근 사이에 있다.

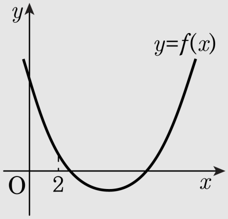
① $8 \le m < 10$, $m > 10$　② $8 \le m < 10$, $m > 8$

③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$

⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

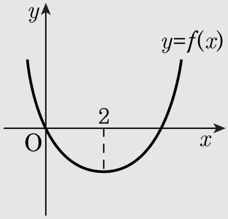
해설

(ⅰ) 경계값 $x=2$ 에서



$f(2)>0$
축의 위치 $m-4>2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ⅱ)



$f(2)<0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m>10$

39. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

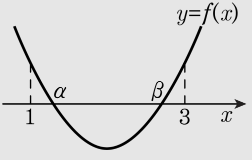
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

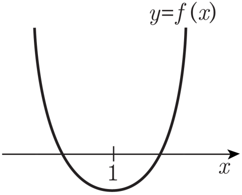
40. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 1보다 작도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a>-1$　　② $a>-2$　　③ $a>-3$

④ $a>-4$　　⑤ $a>-5$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 한 근은 1 보다 크고
다른 한 근은 1 보다 작으므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
즉, $f(1)<0$ 이므로 $-a-3<0$
$\therefore a>-3$



41. $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1 \le a \le 0$일 때 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0\cdots$①

$\alpha^2+b\alpha+a=0\cdots$②

①−② : $(a-b)(\alpha-1)=0$에서

$a \ne b$이므로 $\alpha=1$

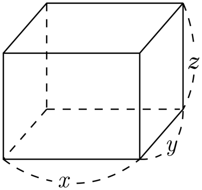
$1+a+b=0$에서 $b=-a-1$

$a^2+b^2=a^2+(-a-1)^2=2a^2+2a+1$

$=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

$-1 \le a \le 0$이므로 $M=1,\ m=\frac{1}{2}$

42. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53 ② 56 ③ 59

④ 62 ⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

43. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$　　② $a > -\dfrac{1}{2}$　　③ $-1 < a < 1$

④ $a \leq \dfrac{2}{3}$　　⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

44. $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=4$ 이 성립할 때, c의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, a, b, c는 실수)

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 4

해설

$a+b+c=4$

$\Rightarrow \quad b=4-(a+c)$

$a^2+b^2+c^2=12$

$\Rightarrow \quad a^2+c^2+\{4-(a+c)\}^2=12$

a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2+(c-4)a+c^2-4c+2=0$

a,b,c 는 실수이므로 판별식이 0 보다 크거나 같다.

$D=(c-4)^2-4(c^2-4c+2)\geq 0$

$\Rightarrow \quad 3c^2-8c-8\leq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{4-2\sqrt{10}}{3}\leq c\leq \frac{4+2\sqrt{10}}{3}$$

$\therefore$ (최댓값 $\times$ 최솟값)

$$=\left(\frac{4-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$=-\frac{8}{3}$$

45. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

① 5　　② 7　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2-3xy+2y^2 = -6$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y) = -6$
이 때, x, y는 양의 정수이므로 $x-y$, $x-2y$도 정수이고 $x-y >$ $x-2y$이다.
따라서, $x-y$, $x-2y$의 값은 다음 표와 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 13 \\ y = 7 \end{cases}$

46. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$　　② $0\le a\le 2$　　③ $a<0,\ a>2$

④ $a\le 0,\ a\ge 2$　　⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1\ge -1$ 이고, $a+1\le 3$ 이어야 하므로

$a\ge 0,\ a\le 2$

$\therefore\ 0\le a\le 2$

47. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$

④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

48. 임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - a|x| + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 실수 a 의 최댓값은? (단, $a > 0$)

① 3　　② $2\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ 1

해설

$x^2 - a|x| + 2 = |x|^2 - a|x| + 2$ 이므로

$|x| = t \ (t \geq 0)$ 로 치환하면 $t^2 - at + 2 \geq 0$

$$f(t) = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2$$

$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$t^2 - at + 2 \geq 0$ 이 성립하려면 $a > 0$ 이므로

그림에서 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$

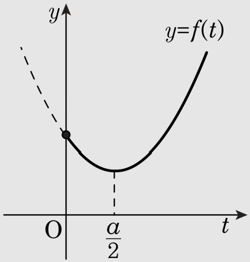
$-\frac{a^2}{4} + 2 \geq 0, \ a^2 - 8 \leq 0$

$-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$

그런데 $a > 0$ 이므로

$0 < a \leq 2\sqrt{2}$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.



49. 이차방정식 $(x-1)(x-3)+m(x-k)=0$이 모든 실수 m에 대하여 항상 서로 다른 두 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $0<k<1$ ② $1<k<3$ ③ $-1<k<1$

④ $-1<k<2$ ⑤ $-1<k<3$

해설

$x^2+(m-4)x+3-mk=0$은

서로 다른 두 실근을 가지므로

$D=(m-4)^2-12+4mk>0$

이것을 정리하면

$m^2+4(k-2)m+4>0 \quad \cdots(\text{i})$

(i)는 모든 실수 m에 대하여 성립해야 하므로

$4(k-2)^2-4<0$

$\therefore\ (k-1)(k-3)<0$

$\therefore\ 1<k<3$

50. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10%를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당
판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$$

작년 판매 금액이 ab이므로

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$$

이 부등식을 정리하면

$$9x^2-900x+20000\leq 0$$

$$(3x-100)(3x-200)\leq 0$$

$$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$$