

1. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 \quad (\because a > 1)$$

2. x 의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10일 때, 상수 k 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = 2x^2 - 8kx = 2(x - 2k)^2 - 8k^2 \text{ 이}$$

이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2k, -8k^2)$ 이다.

- (i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값
이 10이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은
존재하지 않는다.

- (ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하지
않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다.
최솟값이 10이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

3. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 6

⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

4. x 의 범위가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x - 1)^2 + a - 2$$

정의역이 $-1 \leq x \leq 2$ 이므로

최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가된다.

이 때, 최솟값이 1 이므로

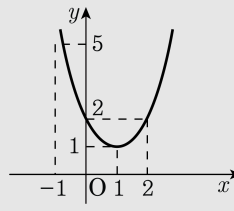
$$a - 2 = 1 \therefore a = 3$$

따라서 주어진 이차함수는 $y = (x - 1)^2 + 1$ 이고

그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓

값은

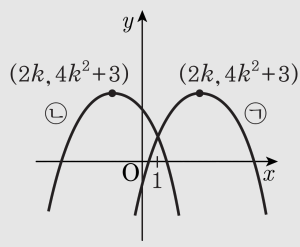
$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x - 2k)^2 + (4k^2 + 3)$$

$$\textcircled{1} \text{ 경우 : } 2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } 4k^2 + 3 = 11, k^2 = 2$$

$$\therefore k = \sqrt{2} \quad \left(\because k \geq \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ 경우 : } 2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$$

$$k = \frac{4}{9} \text{ 인데 } k \leq \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

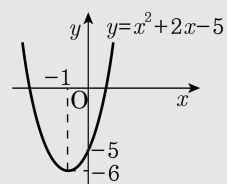
$$\therefore k = \sqrt{2}$$

6. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

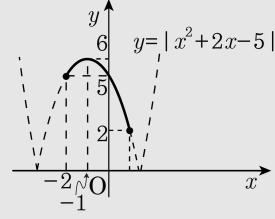
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로
 $y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

7. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①는 두 실근을 가지므로,

$$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 4 \leq 0 \therefore -2 \leq a \leq 2$$

그런데 α, β 는 ①의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a^2 - 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$$0 \leq a^2 \leq 4$$

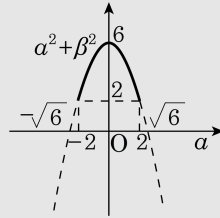
$$\therefore 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$$

$$\therefore 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최댓이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최솟이고, 최솟값 : 2



8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$
(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
 $\therefore x = 0$
(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$
 $3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
 $(3y - 1)(y - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2 - x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2 - x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x + 2)(3x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

10. x 가 실수일 때, 함수 $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3} = k$ 라 하면
 $x^2 + 4x - 1 = k(x^2 - 2x + 3)$
 $(k - 1)x^2 - (2k + 4)x + 3k + 1 = 0$
 $D/4 = (k + 2)^2 - (k - 1)(3k + 1) \geq 0$
 $-2k^2 + 6k + 5 \geq 0$
근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은
3 이다.

11. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y$ 라 놓고,
양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면
 $2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$
 $(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$
 x 가 실수이므로
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$
 $2y^2 - 11y - 2 \leq 0$
 $\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$
 $11 < \sqrt{137} < 12$ 이므로
 $-0.\times\times\times \leq y \leq 5.\times\times\times$
따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

12. 원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

㉠ $3 + 2\sqrt{2}$

㉡ $2 + \sqrt{3}$

㉢ $3\sqrt{3}$

㉣ 6

㉤ $6 + \sqrt{2}$

해설

$\frac{y}{x} = t$ 라고 놓으면 $y = tx \dots\dots\dots \text{㉠}$

㉠을 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 에 대입하여 정리하면

$(t^2 + 1)x^2 - 6(t+1)x + 12 = 0$

$\frac{D}{4} \geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2 - 12(t^2 + 1) \geq 0$

$t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$\therefore 3 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$5k^2 + 4xk + (x^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다. 따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5(x^2 - 1) \geq 0$$

$$-x^2 + 5 \geq 0, \quad x^2 - 5 \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

그런데 α, β 는 $\textcircled{A}$ 의 실근이므로 $\textcircled{C}$ 의 범위 안에 있어야 한다.

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

14. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, \quad (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

16. 이차함수 $y = x^2 + kx - 2k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값과 그 때의 k 의 값을 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 4$

▷ 정답 : $k = -4$

해설

$$y = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - 2k - \frac{1}{4}k^2$$

$$\therefore m = -2k - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}(k+4)^2 + 4$$

따라서 m 의 최댓값은 4 , $k = -4$ 이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

- ㉠ $-\frac{7}{8}$ ㉡ -1 ㉢ $\frac{1}{8}$ ㉣ 1 ㉤ $-\frac{9}{8}$

해설

$$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a - 5 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{의 최솟값 : } m &= -a^2 - 2a - 5 \\ &= -(a + 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

$$m \text{의 최댓값 : } -4$$

19. 이차함수 $y = x^2 - 4nx - n$ 의 최솟값을 n 의 함수 $f(n)$ 이라 할 때, $f(n)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{16}$

해설

$$y = x^2 - 4nx - n = (x^2 - 4nx + 4n^2) - 4n^2 - n = (x - 2n)^2 + (-4n^2 - n)$$

에서 $f(n) = -4n^2 - n = -4\left(n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{1}{64}\right) + \frac{1}{16} = -4\left(n + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}$

따라서 $f(n)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{16}$ 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - px + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}k &= \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.