1. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$

최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$

최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$

$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3\ (\because a > 1)$

2. x의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이

이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(2k, \ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

3. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

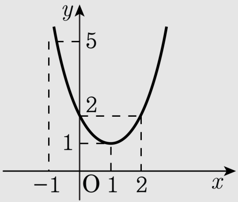
4. x의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x + a - 1$ 의 최소값이 1 이라 한다. 이 때, 이 함수의 최댓값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x + a - 1 = (x-1)^2 + a - 2$
정의역이 $-1 \le x \le 2$ 이므로
최솟값은 $x = 1$ 일 때 $a - 2$ 가된다.
이 때, 최솟값이 1 이므로
$a - 2 = 1 \therefore a = 3$
따라서 주어진 이차함수는 $y = (x-1)^2 + 1$ 이고

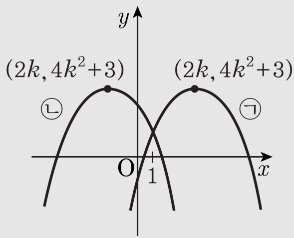
그래프는 다음의 그림과 같으므로 최댓값은
$x = -1$ 일 때 5 가 됨을 알 수 있다.



5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11$, $k^2 = 2$

$\therefore k = \sqrt{2}$ $\left(\because k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

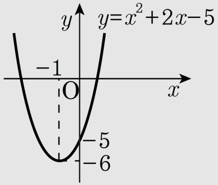
$\therefore k = \sqrt{2}$

6. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

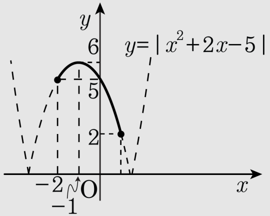
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

7. x 의 이차방정식 $x^2-ax+a^2-3=0$ 의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$x^2-ax+a^2-3=0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D=a^2-4(a^2-3)\geq 0$, 즉 $a^2-4\leq 0$ $\therefore\ -2\leq a\leq 2$

그런데 $\alpha,\ \beta$ 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a^2-3$

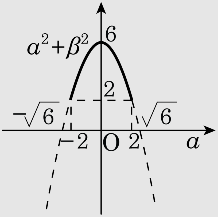
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2(a^2-3)=6-a^2$

여기서, $-2\leq a\leq 2$ 이므로

$0\leq a^2\leq 4$

$\therefore\ 2\leq 6-a^2\leq 6$

$\therefore\ 2\leq \alpha^2+\beta^2\leq 6$



따라서 $\alpha^2+\beta^2$ 은

$a=0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a=\pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2

8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0,$

$3x^2+4x-4\leq 0,\ \ (x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

10. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면

$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$

$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$

$-2k^2+6k+5\geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은 3 이다.

11. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M이라 할 때, $m+M$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}=y$라 놓고,

양변에 x^2+2x+3을 곱하면

$2x^2-4x+1=y(x^2+2x+3)$

$(y-2)x^2+2(y+2)x+3y-1=0$

x가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(y+2)^2-(y-2)(3y-1)\geq 0$

$2y^2-11y-2\leq 0$

$\therefore \dfrac{11-\sqrt{137}}{4}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{137}}{4}$

$11<\sqrt{137}<12$이므로

$-0.\times\times\times\leq y\leq 5.\times\times\times$

따라서 $m=0, M=5$이므로 $m+M=5$

12. 원 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3+2\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$

④ 6 ⑤ $6+\sqrt{2}$

해설

$\dfrac{y}{x}=t$ 라고 놓으면 $y=tx \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$ 에 대입하여 정리하면

$(t^2+1)x^2-6(t+1)x+12=0$

$\dfrac{D}{4}\geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2-12(t^2+1)\geq 0$

$t^2-6t+1\leq 0$

$\therefore\ 3-2\sqrt{2}\leq t\leq 3+2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3+2\sqrt{2}$ 이다.

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식$x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$\dfrac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right) \geq 0$

$-x^2+5 \geq 0,\ x^2-5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

14. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-y-2=0$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\left(y^2-y-2\right)\geq 0$$

$y^2-y-6\leq 0,\ \ (y+2)(y-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq y\leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

15. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore$ $f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

16. 이차함수 $y = x^2 + kx - 2k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값과 그 때의 k 의 값을 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 4$

▷ 정답 : $k = -4$

해설

$$y = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - 2k - \frac{1}{4}k^2$$

$$\therefore m = -2k - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}(k+4)^2 + 4$$

따라서 m 의 최댓값은 4 , $k = -4$ 이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$$
$$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$$= -(a + 1)^2 - 4$$

m 의 최댓값 : -4

19. 이차함수 $y = x^2 - 4nx - n$ 의 최솟값을 n 의 함수 $f(n)$ 이라 할 때, $f(n)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\frac{1}{16}$

해설

$y = x^2 - 4nx - n = (x^2 - 4nx + 4n^2) - 4n^2 - n = (x - 2n)^2 + (-4n^2 - n)$ 에서 $f(n) = -4n^2 - n = -4\left(n^2 + \frac{1}{4}n + \frac{1}{64}\right) + \frac{1}{16} = -4\left(n + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16}$

따라서 $f(n)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{16}$ 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

$$y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5$$
$$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$

이므로

$$k = \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5$$
$$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.