

1. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 \quad (\because a > 1)$$

2. $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x - 2)^2 + k + 4$ 이므로

$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.

따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $y = -(x - 2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

3. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는

아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

4. $x^2 - 5x + 6 < 0$ 일 때, $P = x^2 + 5x + 6$ 이 취할 수 없는 값은?

① 22

② 24

③ 26

④ 28

⑤ 30

해설

$$x^2 - 5x + 6 < 0, (x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\text{이 때, } P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$2 < x < 3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

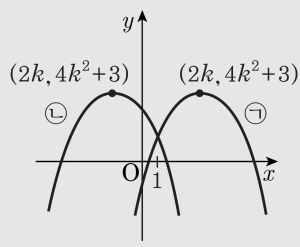
따라서 $P_{x=2} < P < P_{x=3}$ 이 성립한다.

$$P_{x=2} = 20, P_{x=3} = 30 \text{ 이므로 } 20 < P < 30$$

5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x - 2k)^2 + (4k^2 + 3)$$

$$\textcircled{1} \text{ 경우 : } 2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } 4k^2 + 3 = 11, k^2 = 2$$

$$\therefore k = \sqrt{2} \quad \left(\because k \geq \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ 경우 : } 2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$$

$$k = \frac{4}{9} \text{ 인데 } k \leq \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

6. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①는 두 실근을 가지므로,

$$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 4 \leq 0 \therefore -2 \leq a \leq 2$$

그런데 α, β 는 ①의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a^2 - 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$$0 \leq a^2 \leq 4$$

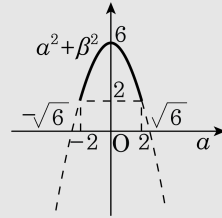
$$\therefore 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$$

$$\therefore 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최댓이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최솟이고, 최솟값 : 2

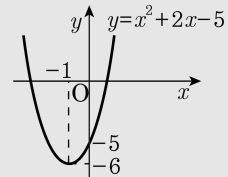


7. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

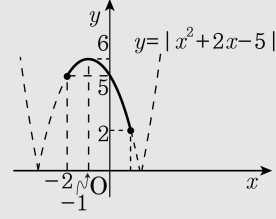
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로
 $y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$
(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
 $\therefore x = 0$
(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$
 $3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
 $(3y - 1)(y - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$$y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, \quad (x+3)(x-1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

10. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$ 을 만족시킬 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$ 에서 x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$$

$$(y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 2$$

따라서 y 의 최댓값은 2, 최솟값은 -3 이다.

11. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, \quad (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

12. x 가 실수일 때, 함수 $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3} = k$ 라 하면
 $x^2 + 4x - 1 = k(x^2 - 2x + 3)$
 $(k - 1)x^2 - (2k + 4)x + 3k + 1 = 0$
 $D/4 = (k + 2)^2 - (k - 1)(3k + 1) \geq 0$
 $-2k^2 + 6k + 5 \geq 0$
근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은 3이다.

13. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
 $x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$
 $\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$
 $\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$
 $\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -5 \leq y \leq 1$
 $\therefore y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

14. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

15. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 3k$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값과 그 때의 k 의 값을 더하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{15}{4}$

해설

$$y = -x^2 + 2kx + 3k = -(x^2 - 2kx + k^2) + k^2 + 3k = -(x - k)^2 + k^2 + 3k$$

$$\therefore M = k^2 + 3k = \left(k^2 + 3k + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{9}{4}$, $k = -\frac{3}{2}$ 이므로 $M + k = \left(-\frac{9}{4}\right) +$

$$\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{4} \text{ 이다.}$$

16. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$$

$$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

17. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x - a)^2 + a^2 + 6a$$

$$\therefore M = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9$$

따라서 M 의 최솟값은 -9 이다.

18. 이차함수 $y = -x^2 + 4mx + 8m - 3$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4mx + 8m - 3 \\ &= -(x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m^2) + 8m - 3 \\ &= -(x - 2m)^2 + 4m^2 + 8m - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= 4m^2 + 8m - 3 \\ &= 4(m^2 + 2m + 1 - 1) - 3 \\ &= 4(m + 1)^2 - 7 \end{aligned}$$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} y &= (x+a)^2 - a^2 - 2a + 1 & m &= -a^2 - 2a + 1 \\ & & &= -(a^2 + 2a + 1 - 1) + 1 \\ & & &= -(a+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - 6a$ 의 최솟값을 A 라고 할 때, A 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$y = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - 6a = (x + a)^2 - a^2 - 6a$$

$$A = -a^2 - 6a = -(a^2 + 6a + 9 - 9) = -(a + 3)^2 + 9$$

$$\therefore 9$$