1. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$

최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$

최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$

$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3$ $(\because a > 1)$

2. $-2 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = -x^2 + 4x + k$ 의 최댓값이 6 일 때, 최솟값은?

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

해설

$y = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 $k + 4$ 이다.
따라서 $k + 4 = 6$ 에서 $k = 2$
$-2 \le x \le 2$ 에서 $y = -(x-2)^2 + 6$ 은 $x = -2$ 일 때 최솟값을 가지며, 최솟값은 -10 이다.

3. $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면

$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는

아래로 볼록한 포물선이다.

그러므로 $-1 \leq x \leq 4$ 의 범위에서

최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,

최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

4. $x^2-5x+6<0$ 일 때, $P=x^2+5x+6$ 이 취할 수 없는 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

해설

$x^2-5x+6<0$, $(x-2)(x-3)<0$ $\therefore\ 2<x<3$

이 때, $P=x^2+5x+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 이므로

$2<x<3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

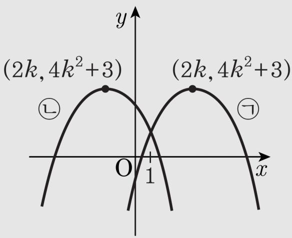
따라서 $P_{x=2}<P<P_{x=3}$ 이 성립한다.

$P_{x=2}=20,\ P_{x=3}=30$ 이므로 $20<P<30$

5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11,\ k^2 = 2$

$\therefore\ k = \sqrt{2}\ \left(\because\ k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

6. x 의 이차방정식 $x^2-ax+a^2-3=0$ 의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^2-ax+a^2-3=0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D=a^2-4(a^2-3)\geq 0$, 즉 $a^2-4\leq 0 \therefore\ -2\leq a\leq 2$

그런데 $\alpha,\ \beta$ 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=a^2-3$

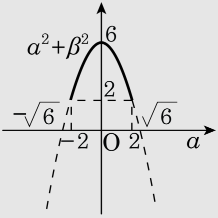
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2(a^2-3)=6-a^2$

여기서, $-2\leq a\leq 2$ 이므로

$0\leq a^2\leq 4$

$\therefore\ 2\leq 6-a^2\leq 6$

$\therefore\ 2\leq \alpha^2+\beta^2\leq 6$



따라서 $\alpha^2+\beta^2$ 은

$a=0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

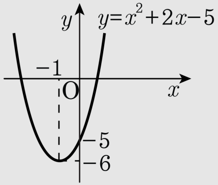
$a=\pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2

7. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

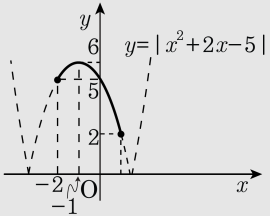
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3 , 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

10. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2+4x+y-2=0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+4x+(y^2+y-2)=0$에서 x가 실수이므로

$\dfrac{D}{4}=4-y^2-y+2 \geq 0$

$(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

11. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(2y^2 + y - 6\right) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0,\quad (y+3)(y-2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

12. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면

$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$

$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$

$-2k^2+6k+5\geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은 3 이다.

13. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$

$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$

$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$

$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq y\leq 1$

$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

14. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

15. 이차함수 $y=-x^2+2kx+3k$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값과 그 때의 k 의 값을 더하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{15}{4}$

해설

$y=-x^2+2kx+3k=-(x^2-2kx+k^2)+k^2+3k=-(x-k)^2+k^2+3k$

$\therefore M=k^2+3k=\left(k^2+3k+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}=\left(k+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{9}{4}$, $k=-\frac{3}{2}$ 이므로 $M+k=\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{15}{4}$ 이다.

16. 이차함수 $y=2x^2+4ax-4a$ 의 최솟값을 m이라고 할 때, m의 최댓값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=2x^2+4ax-4a=2(x+a)^2-2a^2-4a$

$\therefore m=-2a^2-4a=-2(a+1)^2+2$

따라서 m의 최댓값은 2 이다.

17. 이차함수 $y = -x^2 + 2ax - 6a$ 의 최댓값을 M이라고 할 때, M의 최솟값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$y = -x^2 + 2ax + 6a = -(x-a)^2 + a^2 + 6a$

$\therefore M = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9$

따라서 M의 최솟값은 -9 이다.

18. 이차함수 $y = -x^2 + 4mx + 8m - 3$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4mx + 8m - 3 \\ &= -(x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m^2) + 8m - 3 \\ &= -(x - 2m)^2 + 4m^2 + 8m - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ M &= 4m^2 + 8m - 3 \\ &= 4(m^2 + 2m + 1 - 1) - 3 \\ &= 4(m + 1)^2 - 7 \end{aligned}$$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$y = (x+a)^2 - a^2 - 2a + 1$ $\quad m = -a^2 - 2a + 1$

$$= -(a^2 + 2a + 1 - 1) + 1$$

$$= -(a+1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - 6a$ 의 최솟값을 A 라고 할 때, A 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = x^2 + 2ax + a^2 - a^2 - 6a = (x + a)^2 - a^2 - 6a$

$A = -a^2 - 6a = -(a^2 + 6a + 9 - 9) = -(a + 3)^2 + 9$

$\therefore$ 9