

1. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 \quad (\because a > 1)$$

2. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1, b = -2$

② $a = 1, b = 2$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 1, b = -2$

⑤ $a = -2, b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 4ax + 4a + 3 \\ &= a(x-2)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3) \text{ 이므로} \\ x &= 0 \text{ 일 때 최솟값은 } -1 \text{ 을 갖는다.} \end{aligned}$$

$$-1 = 4a + 3$$

$$\therefore a = -1$$

점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$\therefore b = a + 3 = 2$$

3. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$$

이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \leq x \leq 1$ 에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$

$\therefore a = -2$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

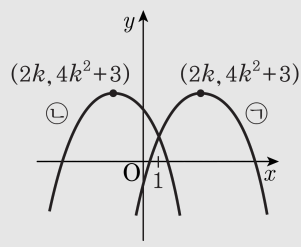
해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -9 + 2a^2$
 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
 $\therefore -3 \leq a \leq 3$
 $\therefore 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
 $\therefore (\text{최댓값}) + (\text{최솟값}) = 0 + 6 = 6$

5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x - 2k)^2 + (4k^2 + 3)$$

$$\textcircled{1} \text{ 경우 : } 2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } 4k^2 + 3 = 11, k^2 = 2$$

$$\therefore k = \sqrt{2} \quad \left(\because k \geq \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{2} \text{ 경우 : } 2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{최대 : } y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$$

$$k = \frac{4}{9} \text{ 인데 } k \leq \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

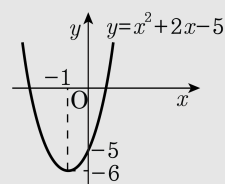
$$\therefore k = \sqrt{2}$$

6. $-2 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

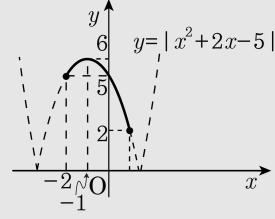
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ 이므로
 $y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서
 함수 $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
 최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

7. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①는 두 실근을 가지므로,

$$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0, \text{ 즉 } a^2 - 4 \leq 0 \therefore -2 \leq a \leq 2$$

그런데 α, β 는 ①의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a^2 - 3$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$$0 \leq a^2 \leq 4$$

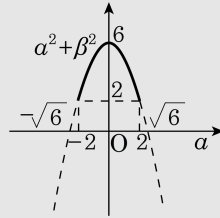
$$\therefore 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$$

$$\therefore 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최댓이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최솟이고, 최솟값 : 2



8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $(y - 1)x^2 + (y + 1)x + y - 1 = 0$
(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$
 $\therefore x = 0$
(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $D = (y + 1)^2 - 4(y - 1)^2 \geq 0$
 $3y^2 - 10y + 3 \leq 0$
 $(3y - 1)(y - 3) \leq 0$
 $\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$
따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. 실수 x, y 가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족시킬 때, x 의 최댓값과 y 의 최댓값의 합은?

- ① $2\sqrt{2} - 1$
- ② $2\sqrt{2} + 1$
- ③ $2\sqrt{2} + 2$
- ④ $\sqrt{2} + 4$
- ⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을
(i) x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$ 에서 x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0, y^2 \leq 4$
 $\therefore -2 \leq y \leq 2$
따라서, y 의 최댓값은 2이다.
(ii) y 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$ 에서 y 가 실수이므로
 $\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0, x^2 \leq 8$
 $\therefore -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

10. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

- ① 최댓값 1, 최솟값 -3 ② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1 ④ 최댓값 -1 , 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x 에 관해 내림차순으로 정리하면
 $4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$
실수의 해를 가지므로
 $\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$
 $\therefore y^2 + 2y - 3 \leq 0$
 $\therefore (y + 3)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq y \leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

11. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2 - x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2 - x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x + 2)(3x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

12. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

13. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$$y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, \quad (x+3)(x-1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

14. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
 $x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
 $\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$
 $\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$
 $\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$
 $\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$
 $\therefore -5 \leq y \leq 1$
 $\therefore y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

15. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

- ① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{33}{4}$ ④ $\frac{31}{2}$ ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

16. 함수 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots \textcircled{A}$ 이 최솟값을 가질 때이다.

만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함수값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.

따라서 $a > 0 \cdots \textcircled{B}$

$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots \textcircled{C}$ 의 두 식이 모두 만족되면, $\textcircled{A}$ 이 양의 최솟값을 갖는다.

$$-4a^2 + 8a + 9 < 0 \text{ 에서 } a < \frac{2 - \sqrt{13}}{2}, a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2}$$

따라서 $\textcircled{B}$ 과의 공통 범위를 구하면 $a > \frac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로 $a = 3$ 이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - px + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5 \\&= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}k &= \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5 \\&= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}\end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.

18. 이차함수 $y = -x^2 + 6kx + 6k - 3$ 의 최댓값을 $f(k)$ 라고 할 때, $f(k)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 6kx + 9k^2 - 9k^2) + 6k - 3 \\ &= -(x - 3k)^2 + 9k^2 + 6k - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 9k^2 + 6k - 3 \\ &= 9 \left(k^2 + \frac{2}{3}k + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) - 3 \\ &= 9 \left(k + \frac{1}{3} \right)^2 - 4 \end{aligned}$$

$\therefore f(k)$ 의 최솟값은 -4 이다.

19. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

- ① $-\frac{7}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{9}{8}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x - m)^2 + m - 1 + 2m^2$$

$$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.

20. 이차함수 $y = -x^2 + 4mx + 8m - 3$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4mx + 8m - 3 \\ &= -(x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m^2) + 8m - 3 \\ &= -(x - 2m)^2 + 4m^2 + 8m - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= 4m^2 + 8m - 3 \\ &= 4(m^2 + 2m + 1 - 1) - 3 \\ &= 4(m + 1)^2 - 7 \end{aligned}$$