1. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$
최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$
최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$
$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$
$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 3$ $(\because a > 1)$

2. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -2$
② $a = 1,\ b = 2$
③ $a = -1,\ b = 2$
④ $a = 1,\ b = -2$
⑤ $a = -2,\ b = 2$

해설

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$= a(x-2)^2 + 3\ (0 \leq x \leq 3)$ 이므로
$x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.

$-1 = 4a + 3$
$\therefore a = -1$

점 $(1,\ b)$ 를 지나므로
$\therefore b = a + 3 = 2$

3. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-9+2a^2=0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$x^2+2ax-9+2a^2=0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-9+2a^2$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2a)^2-4(-9+2a^2)=-4a^2+36$

그런데 $\dfrac{D}{4}=a^2+9-2a^2\geq 0$

$\therefore\ -3\leq a\leq 3$

$\therefore\ 0\leq|\alpha-\beta|^2\leq 36$

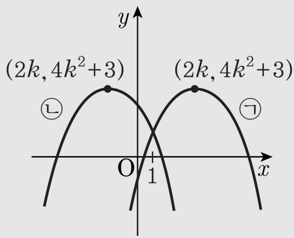
즉, $0\leq|\alpha-\beta|\leq 6$

$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$=0+6=6$

5. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$　　② $\sqrt{2}$　　③ $-\sqrt{2}$　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11$, $k^2 = 2$

$\therefore\ k = \sqrt{2}\ \left(\because\ k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

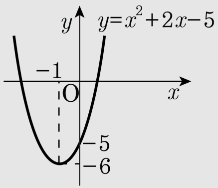
$\therefore\ k = \sqrt{2}$

6. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

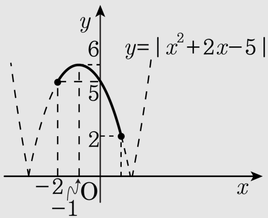
① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

7. x 의 이차방정식 $x^2 - ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^2 - ax + a^2 - 3 = 0 \cdots$ ㉠

㉠는 두 실근을 가지므로,

$D = a^2 - 4(a^2 - 3) \geq 0$, 즉 $a^2 - 4 \leq 0$ $\therefore\ -2 \leq a \leq 2$

그런데 $\alpha,\ \beta$ 는 ㉡의 두 근이므로,

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a^2 - 3$

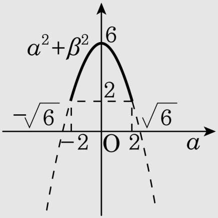
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = a^2 - 2(a^2 - 3) = 6 - a^2$

여기서, $-2 \leq a \leq 2$ 이므로

$0 \leq a^2 \leq 4$

$\therefore\ 2 \leq 6 - a^2 \leq 6$

$\therefore\ 2 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 6$



따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 은

$a = 0$ 일 때 최대이고, 최댓값 : 6

$a = \pm 2$ 일 때 최소이고, 최소값 : 2

8. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

9. 실수 x, y가 $x^2+2y^2-2xy-4=0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{2}+2$

④ $\sqrt{2}+4$ ⑤ $\sqrt{2}+5$

해설

$x^2+2y^2-2xy-4=0$을

(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2-2yx+2y^2-4=0$에서 x가 실수이므로

$$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2-4)\geq 0,\ y^2\leq 4$$

$\therefore\ -2\leq y\leq 2$

따라서, y의 최댓값은 2이다.

(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면

$2y^2-2xy+x^2-4=0$에서 y가 실수이므로

$$\frac{D'}{4}=x^2-2(x^2-4)\geq 0,\ x^2\leq 8$$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$

따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2}+2$

10. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2+y^2-16x+2y+13=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 −3
② 최댓값 3, 최솟값 −1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 −1, 최솟값 −3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 −1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면

$4x^2-16x+y^2+2y+13=0$

실수의 해를 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-8)^2-4(y^2+2y+13)\geq 0$$

$\therefore\ y^2+2y-3\leq 0$

$\therefore\ (y+3)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -3\leq y\leq 1$

따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 −3

11. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0,$

$3x^2+4x-4\leq 0,\ \ (x+2)(3x-2)\leq 0$

$$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

12. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2+y^2-4x-y-2=0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-4x+y^2-y-2=0$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\left(y^2-y-2\right)\geq 0$$

$y^2-y-6\leq 0,\ \ (y+2)(y-3)\leq 0$

$\therefore -2\leq y\leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

13. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

14. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$

$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$

$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$

$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$

$\therefore\ -5\leq y\leq 1$

$\therefore$ y 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

15. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{33}{4}$　④ $\frac{31}{2}$　⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\ &= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\ &= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6) \end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.

16. 함수 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{ax^2 - 3x + a - 2}}$ 이 최댓값을 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

분모가 항상 양수이므로 주어진 함수가 최대가 될 때는 함수 $y = ax^2 - 3x + a - 2 \cdots$ ㉠이 최솟값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $a > 0 \cdots$ ㉡
$D = -4a^2 + 8a + 9 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.

$-4a^2 + 8a + 9 < 0$ 에서 $a < \dfrac{2 - \sqrt{13}}{2}$, $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2}$

따라서 ㉡과의 공통 범위를 구하면 $a > \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2} = 2.80$ 이므로

$a = 3$ 이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{11}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - px + p^2 - 2p + 5 \\ &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5 \\ &= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5 \\ &= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5 \\ &= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

따라서 $p = \dfrac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\dfrac{11}{3}$ 을 갖는다.

18. 이차함수 $y=-x^2+6kx+6k-3$ 의 최댓값을 $f(k)$ 라고 할 때, $f(k)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x^2-6kx+9k^2-9k^2)+6k-3 \\ &= -(x-3k)^2+9k^2+6k-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(k) &= 9k^2+6k-3 \\ &= 9\left(k^2+\frac{2}{3}k+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)-3 \\ &= 9\left(k+\frac{1}{3}\right)^2-4 \end{aligned}$$

$\therefore$ $f(k)$ 의 최솟값은 -4 이다.

19. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$　② -2　③ $-\frac{9}{8}$　④ 3　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x-m)^2 + m - 1 + 2m^2$

$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.

20. 이차함수 $y = -x^2 + 4mx + 8m - 3$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4mx + 8m - 3 \\ &= -(x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m^2) + 8m - 3 \\ &= -(x - 2m)^2 + 4m^2 + 8m - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ M &= 4m^2 + 8m - 3 \\ &= 4(m^2 + 2m + 1 - 1) - 3 \\ &= 4(m + 1)^2 - 7 \end{aligned}$$