1. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2$ 의 최솟값이 2 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 + ax + 2 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2\end{aligned}$$

$$-\frac{a^2}{4} + 2 = 2$$

$$\therefore a = 0$$

2. $x + y = 3$ 일 때 $x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{13}{4}$

해설

$$x + y = 3 \rightarrow y = -x + 3$$

$$x - y^2 = x - (-x + 3)^2$$

$$= x - (x^2 - 6x + 9)$$

$$= -x^2 + 7x - 9$$

$$= -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

3. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$y = x^2 - 2x - 3a = (x - 1)^2 - 3a - 1$$

$$\text{최솟값: } x = 1 \text{ 일 때 } \Rightarrow -3a - 1$$

$$\text{최댓값: } x = a \text{ 일 때 } \Rightarrow a^2 - 5a$$

$$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a = 3 (\because a > 1)$$

4. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$$(y-1)x^2 + (y+1)x + y-1 = 0$$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$$\therefore x = 0$$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$$

$$(3y-1)(y-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 y 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

5. 이차함수 $y = x^2 - 6mx - 9m + 6$ 의 최솟값을 $f(m)$ 이라고 할 때, $f(m)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{21}{4}$

② $\frac{13}{2}$

③ $\frac{33}{4}$

④ $\frac{31}{2}$

⑤ 8

해설

$$\begin{aligned}y &= x^2 - 6mx - 9m + 6 \\&= (x^2 - 6mx + 9m^2) + (-9m^2 - 9m + 6) \\&= (x - 3m)^2 + (-9m^2 - 9m + 6)\end{aligned}$$

$$f(m) = -9m^2 - 9m + 6 = -9 \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{33}{4}$$

$\therefore f(m)$ 의 최댓값은 $\frac{33}{4}$ 이다.