1. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a의 조건은?
(a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1 < a < 1$　　② $a=b$이고 $-2 < a < 2$

③ $a=b$이고 $-3 < a < 3$　　④ $a=b$이고 $-4 < a < 4$

⑤ $a=b$이고 $-5 < a < 5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서
$(a-b)x-b^2-a^2+8 > 0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로
$a=b$
$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$
$\therefore a^2<4$이므로 $-2<a<2$
즉 $a=b$이고 $-2<a<2$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+5>4x-1 \\ 3-x \le 2x+6 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

해설

정리하면 $x<3$, $-1 \le x$

$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 4개이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$ ② $-2 \le x \le 2$ ③ $-1 \le x \le 2$

④ $0 \le x \le 2$ ⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2+x-6 \le 0$ 에서
$(x+3)(x-2) \le 0$
$-3 \le x \le 2 \cdots$ (가)
$|x-1| \le 3$ 에서
$-3 \le x-1 \le 3$
$-2 \le x \le 4 \cdots$ (나)
(가), (나)에서 $-2 \le x \le 2$

4. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답:

▷ 정답: $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

5. 연립부등식 $3(2x-1) \le 2(x+6),\ 2(x+6) \le 5(x+1)$ 에 대하여 해를 구하면?

① $\frac{7}{3} < x < \frac{15}{4}$ ② $\frac{7}{3} \le x < \frac{15}{4}$ ③ $2 \le x < 5$
④ $\frac{7}{3} \le x \le \frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{7}{3} < x < 5$

해설

$3(2x-1) \le 2(x+6) \Rightarrow\ 6x-3 \le 2x+12$

$\Rightarrow\ 4x \le 15 \Rightarrow\ x \le \frac{15}{4}$

$2(x+6) \le 5(x+1) \Rightarrow\ 2x+12 \le 5x+5$

$\Rightarrow\ x \ge \frac{7}{3}$

$\therefore \frac{7}{3} \le x \le \frac{15}{4}$

6. 다음 연립부등식 중 해가 <u>없는</u> 것을 모두 고르면?

① $\begin{cases} 3x-2>-2x+3 \\ 2(x+1)\geq 8 \end{cases}$

② $\begin{cases} -\frac{x}{2}\leq \frac{1}{4}-x \\ -0.2x-1\geq -1.2x-3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 7x-1>4x+11 \\ 3x-3\leq 1-2x \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2x>6 \\ -x\geq -3 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 2x-3x\leq 7 \\ x+1>5 \end{cases}$

해설

① $x\geq 3$

② $-2\geq x\leq \frac{1}{2}$

③ $x\geq 4$ 또는 $x\leq \frac{4}{5}$ 이므로 해가 없다.

④ $x>3$ 또는 $x\leq 3$ 이므로 해가 없다.

⑤ $x>4$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2(x+a) \le 6 \\ 3b \le 3x-3 \end{cases}$ 의 해가 $-1 \le x \le 2$ 일 때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식을 정리하면

$\begin{cases} x \le 3-a \\ b+1 \le x \end{cases}$

$\therefore\ b+1 \le x \le 3-a$

$b+1=-1,\ 3-a=2$

$\therefore\ b=-2,\ a=1$

$\therefore\ a+b=-1$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x - 1 \le 3 \end{cases}$ 의 해집합이 공집합이 되기 위한 a 의 값 중 가장 작은 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$\begin{cases} x > a \\ x - 1 \le 3 \end{cases}$ 가 공집합이려면 $a \ge 4$

a 의 가장 작은 값은 4

9. 어떤 자연수의 2 배에서 6 을 뺀 수는 9 보다 작고, 27 에서 그 자연수의 3 배를 뺀 수도 9 보다 작다고 한다. 이 때, 어떤 자연수를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{cases} 2x-6<9 \\ 27-3x<9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x<9+6 \\ -3x<9-27 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x<\frac{15}{2} \\ x>6 \end{cases}$$

$\therefore x=7$

10. x에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $a < b$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

② $a < b$일 때, $x \leq -1,\ x \leq 3$이다.

③ $a < 0$일 때, $-1 \leq x \leq 3$이다.

④ $b < 0$일 때, $x \leq -1,\ x \geq 3$이다.

⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$을 이항하여 정리하면
$(a-b)x^2 - 2(a-b)x - 3(a-b) \geq 0$(이차부등식이므로 $a \neq b$)

i) $a < b$이면 $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \leq 0$
$\therefore -1 \leq x \leq 3$

ii) $a > b$이면
$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \geq 0$
$\therefore x \leq -1,\ x \geq 3$

11. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$
$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$
모든 x에 대해 성립하려면,
$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다
$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서
$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$
$=(-k+4)k \le 0$
$\therefore\ k(k-4) \ge 0, \quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$
$\therefore\ \ k \ge 4 (\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

12. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

13. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha$, $2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

14. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$ ② $1 \le k \le 5$ ③ $k \le -1, k \le 5$

④ $k < 1, k > 5$ ⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

$\therefore\ 1 < k < 5$

15. $1 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax < 4 + x - x^2$이 항상 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a < 2$ ③ $a < 3$ ④ $a < 4$ ⑤ $a < 5$

해설

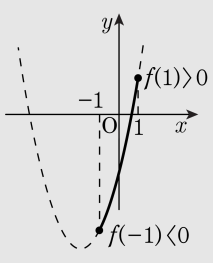
부등식 $ax < 4 + x - x^2$ 에서 $x^2 + (a-1)x - 4 < 0$
$1 \le x \le 2$ 에서
이 부등식이 항상 성립해야 하므로
방정식 $x^2 + (a-1)x - 4 = 0$ 의 한 근이1 보다 작고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.
$f(x) = x^2 + (a-1)x - 4$ 로 놓으면
$f(1) = 1 + (a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 4 \cdots$ ㉠
$f(2) = 4 + 2(a-1) - 4 < 0$ 에서 $a < 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a < 1$

16. 이차방정식 $x^2+4mx-3m=0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m>\frac{2}{9}$ ② $m>\frac{1}{7}$ ③ $m>-\frac{1}{3}$
④ $m<-\frac{1}{3}$ ⑤ $m<\frac{2}{9}$

해설

$f(x)=x^2+4mx-3m$으로 놓을 때,
$f(x)=0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1)=1-4m-3m<0 \Rightarrow m>\frac{1}{7}$

$f(1)=1+4m-3m>0 \Rightarrow m>-1$

$\therefore\ m>\frac{1}{7}$

17. 연립부등식 $\begin{cases} 1.2x-2 \le 0.8x+3.2 \\ 3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2} \\ 0.\dot{9}x \le 6 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -9 ② -5 ③ -2 ④ 2 ⑤ 9

해설

i) $1.2x-2 \le 0.8x+3.2$,
$0.4x \le 5.2$, $x \le 13$

ii) $3-\dfrac{x-2}{4} < \dfrac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12-(x-2) < 2(2x-3)$, $x > 4$

iii) $0.\dot{9}x \le 6$

$\dfrac{9}{9}x \le 6$

$x \le 6$

$\therefore\ 4 < x \le 6$

18. 다음 조건을 동시에 만족하는 x 의 범위는?

(가) $2x-y=-5$ (나) $-x<2y<3(x+6)$

① $x>8$ ② $x<-2$ ③ $-8<x<-2$

④ $-2<x<8$ ⑤ $-8<x<2$

해설

$2x-y=-5 \Rightarrow y=2x+5$를 부등식에 대입하면,

$-x<2(2x+5)<3(x+6)$

$$\begin{cases} -x<2(2x+5) \\ 2(2x+5)<3(x+6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x<4x+10 \\ 4x+10<3x+18 \end{cases}$$

정리하면 $\begin{cases} x>-2 \\ x<8 \end{cases}$ 이므로 $-2<x<8$ 이다.

19. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$

$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$

$[A]([A]+3)<0$　$\therefore -3<[A]<0$

$-2 \le A < 0$　$\therefore -2 \le x-1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$

20. 두 부등식 $x^2-2x-8>0$,
$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 범위를 $b\le a\le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x-4)(x+2)>0$,
$\therefore\ x>4,\ x<-2$
$x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$
$(x-a)(x-a-1)<0$
두 부등식의 공통범위가 없으려면
$a\ge -2,\ a+1\le 4 \rightarrow a\le 3$
$\therefore\ -2\le a\le 3$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$