1. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$　② $y=2$　③ $x+y=2$
④ $x-y=-4$　⑤ $x+y=0$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로
$b=-a+2$ ⋯ ㉠
$\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,
$a-b=x$, $a+b=y$
$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{y-x}{2}$
㉠ 에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$
$\therefore y-x=-(x+y)+4$
$\therefore y=2$

2. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $A(-2, 3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$
② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$
④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $A(-2, 3)$, $Q(x, y)$의 중점의 좌표를 $P(X, Y)$ 라 하면,

$P(X, Y)=P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$이므로

$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

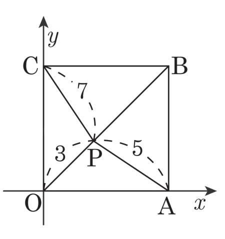
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

3. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC 의 내부의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}} = 3$, $\overline{\mathrm{AP}} = 5$, $\overline{\mathrm{CP}} = 7$ 일 때 선분 PB 의 길이는?



① $2\sqrt{15}$　② $\sqrt{65}$　③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB 의 길이는

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$ 이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{65}$

4. 직선 $y = x+2$ 위의 점 P는 두 점 $A(-2,0)$, $B(4,-2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1,1)$ ② $(0,2)$ ③ $(1,3)$
④ $(2,4)$ ⑤ $(3,5)$

해설

P가 $y = x+2$ 위에 있으므로 $P(a,\ a+2)$라고 놓을 수 있다.
$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로
$\sqrt{(a+2)^2+(a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2+(a+4)^2}$
$2(a+2)^2 = (a-4)^2+(a+4)^2$
$8a = 24$
$\therefore\ a = 3$
$\therefore\ P(3,\ 5)$

5. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

6. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, −3)을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$ 이다.

7. $\triangle$ABC 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

8. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7, 4)$, $\mathrm{B}(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는
선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.
$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$
$\therefore\ 5a = 32$

9. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$\left(\dfrac{-1+3+1}{3},\ \dfrac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$

$b=1,\ \dfrac{a+9}{3}=\dfrac{10}{3}$

$a=1,\ \ b=1\ \therefore\ ab=1$

10. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심　　② 내심　　③ 수심

④ 무게중심　　⑤ 방심

해설

$A(x_1,\ y_1),\quad B(x_2,\ y_2),\quad C(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 $D(x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

$$P = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}+k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

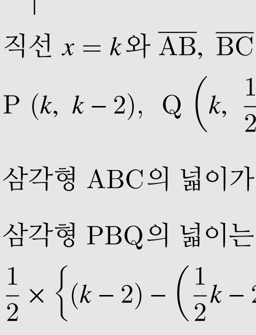
$x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

11. 세 점 A $(4,\ 2)$, B $(0,\ -2)$, C $(4,\ 0)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=k$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x=k$와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P $(k,\ k-2)$, Q $\left(k,\ \frac{1}{2}k-2\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}\times2\times4=4$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{(k-2)-\left(\frac{1}{2}k-2\right)\right\}\times k=2,\ k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}\ (\because\ 0<k<4)$

12. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$
④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$
⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$

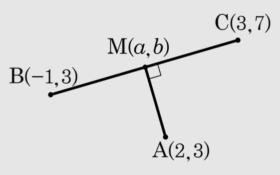
에서 ㉠, ㉡의 교점은 $(1,\ 2)$ 이다.
(ⅰ) ㉢이 점$(1,\ 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$
(ⅱ) ㉢이 ㉠과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$
(ⅲ) ㉢이 ㉡과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$
이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은
$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$
또는 $a=-\frac{2}{3}$ 이다.

13. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\frac{7-3}{3-(-1)} \times \frac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$, $\quad \therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \frac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 9$

14. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 $2\ :\ 1$로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

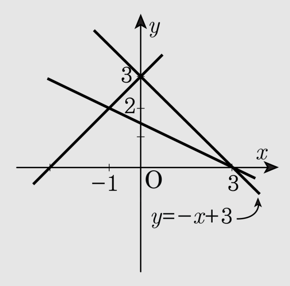
$\therefore\ 3a+b=5$

15. 두 직선 $y = -x + 3, y = mx + m + 2$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



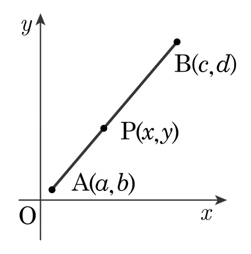
$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m = -\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$

16. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$를 이은 선분 위에 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 40$ 이고, $5x = 3a+2c$, $5y = 3b + 2d$ 가 성립할 때, 선분 AP 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$5x = 3a + 2c$ 이므로 $x = \dfrac{3a+2c}{5} = \dfrac{2c+3a}{2+3}$

$5y = 3b + 2d$ 이므로 $y = \dfrac{3b+2d}{5} = \dfrac{2d+3b}{2+3}$

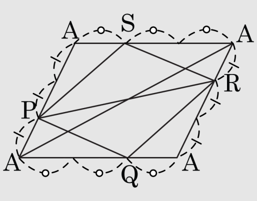
따라서 점 P 는 선분 AB 를 2 : 3 으로 내분하는 점이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{5}\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{5} \cdot 40 = 16$

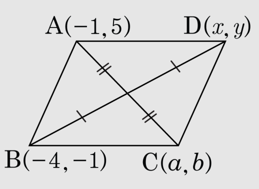
17. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. A$(-1,5)$, B$(-4,-1)$이고 R$(7,6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1,6)$ ② $(1,7)$ ③ $(2,6)$ ④ $(2,7)$ ⑤ $(3,6)$

해설



다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.
A$(-1,5)$, B$(-4,-1)$이므로 점 P의 좌표는
P$\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$
$\therefore$ P$(-3,1)$
R$(7,6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$
즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠
이 때, 점 D(a,b)로 놓으면
대각선 BD의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$에서 $a = 8$
$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $b = 8$
따라서 점 D$(8,8)$이므로
변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는
S$\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$
즉 S$(2,6)$



[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를
C(a,b), D(x,y)로 놓으면
$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로
$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2}$에서
$x-a=3 \cdots$ ㉠
$y-b=6 \cdots$ ㉡
R$(7,\ 6)$이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$에서 $a+2x=21 \cdots$ ㉢
$\frac{2y+b}{3} = 6$에서 $b+2y=18 \cdots$ ㉣
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=5, x=8$
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=2, y=8$
$\therefore$ D$(8,8)$
그러므로 변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는
S$\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$
즉 S$(2,6)$

18. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $\mathrm{P}(2,\ 5)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, m의 값을 구하여라.

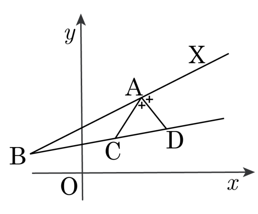
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$라 하면
$x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$의 두 근이 $x_1,\ x_2$이므로
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$이다.
두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$와 $\mathrm{P}(2,\ 5)$의 무게중심이 $(4,\ 1)$이므로
$\dfrac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4$에서 $x_1 + x_2 = 10$이므로
$m + 6 = 10 \quad \therefore\ m = 4$

19. 다음 좌표평면에서 세 점 A(7, 6), B(−5, 1), C(3, 3) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 BA의 연장선 위에 한 점 X 를 잡고, ∠XAC의 이등분선이 변 BC 의 연장선과 만나는 교점을 D(x, y) 라 할 때, $x+4y$ 의 값을 구하면?

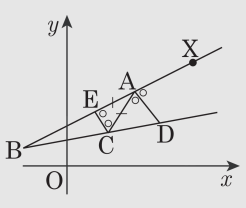


▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$ 와 평행하게 $\overline{CE}$ 를 그리면



∠AEC = ∠ACE 가 되어 $\overline{CA} = \overline{EA}$ 가 성립한다.

$\overline{BA} : \overline{EA}(\overline{CA}) = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{BA} = \sqrt{(7+5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{CA} = \sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

따라서 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5 로 외분하는 점이다.

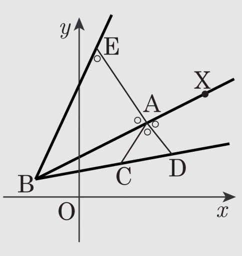
$x = \dfrac{13\times3-5\times(-5)}{13-5} = 8,$

$y = \dfrac{13\times3-5\times1}{13-5} = \dfrac{17}{4}$

$\therefore x+4y = 8+4\times\dfrac{17}{4} = 25$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 평행이 되게 점 B에서 그린 직선과 $\overline{AD}$ 의 연장선과의 교점을 E 라 하면 △ACD 와 △EBD 는 닮음이고, △ABE 는 이등변삼각형이다.



$\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{AB}$

즉, 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 로 외분하는 점이다.

(이하는 위의 해설과 같은 과정이다.)

20. 점 $A(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$ ② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$ ④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 $P(a,\ -a+3)$ 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

21. 점 $(2,\ 3)$ 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$ 라 하자. 이 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?(단, O 는 원점이고 $a,\ b$ 는 양수이다.)

① 8　　② 9　　③ 12　　④ 15　　⑤ 16

해설

x 절편, y 절편이 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 이므로

직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.

이 때, 점$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{3}{b}}$

($\therefore$ $a70, b70$산술기하평균)

따라서 $ab\ge 24$ 이고

$\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\times 24=12$ 이다.

따라서, $\triangle$OAB 의 넓이의 최솟값은 12

22. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

i. l 과 l' 은 만나지 않는다.
ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 이다.
iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x - 3y + 15 = 0$
② $2x - 3y - 13 = 0$
③ $2x - 3y - 11 = 0$
④ $3x + 2y + 11 = 0$
⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.
즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}$, $|-2+c| = 13$
$-2 + c = \pm 13 \quad \therefore\ c = 15$ 또는 $c = -11$
$\therefore\ l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서
l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은
$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

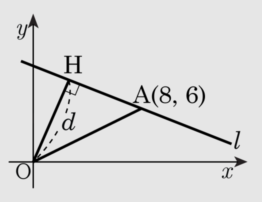
23. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \le \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \le \overline{OA} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$\therefore\ d \le 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

24. $x,\ y$ 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 $x,\ y$ 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

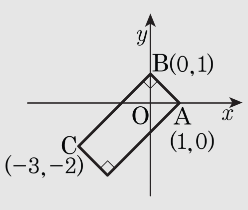
① 2　　② 6　　③ 8　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2\cdots$㉠ 이고,$x,\ y$ 는 정수이므로

㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1),\ (1,\ 0), (-2,-3),\ (-3,-2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$

25. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P\,(x,\ y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$, $y = \pm\frac{4x - 3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$