1. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=-x+2$ 위를 움직일 때 점 $\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)$의 자취가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x=1$ ② $y=2$ ③ $x+y=2$

④ $x-y=-4$ ⑤ $x+y=0$

해설

$\mathrm{P}(a,\ b)$가 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$b=-a+2 \cdots$ ㉠

$\mathrm{Q}(a-b,\ a+b)=(x,\ y)$라 하면,

$a-b=x$, $a+b=y$

$\therefore a=\dfrac{x+y}{2}$, $b=\dfrac{y-x}{2}$

㉠에 대입하면 $\dfrac{y-x}{2}=-\dfrac{x+y}{2}+2$

$\therefore y-x=-(x+y)+4$

$\therefore y=2$

2. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$

② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$

④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를

$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

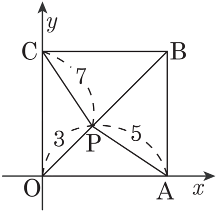
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

3. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{OP}=3$, $\overline{AP}=5$, $\overline{CP}=7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \\ x^2+(a-y)^2=49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{PB}=\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2+(a-y)^2=25+49-9=65$

따라서 $\overline{PB}=\sqrt{65}$

4. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, -2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$　② $(0, 2)$　③ $(1, 3)$

④ $(2, 4)$　⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a,\ a+2)$라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$이므로

$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$

$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$

$8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

$\therefore\ P(3,\ 5)$

5. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3+\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

6. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8}, 0\right)$ ② $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$ ③ $O\left(0, \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0, \frac{8}{5}\right)$ ⑤ $O(0, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y=0 \cdots$ ①
$\overline{AO}=\overline{BO}$에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x-6y=16$
즉 $5x-3y=8\cdots$②
①과 ②에서 $x=\frac{8}{5}$, $y=0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5}, 0\right)$이다.

7. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

8. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7, 4)$, $\mathrm{B}(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.

$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$

$\therefore\ 5a = 32$

9. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3},\ \frac{a+3+6}{3}\right)=\left(b,\ \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1,\ \frac{a+9}{3}=\frac{10}{3}$$

$$a=1,\quad b=1\quad \therefore\ ab=1$$

10. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심

④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

$A(x_1,\ y_1),\ \ B(x_2,\ y_2),\ \ C(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 $D(\ x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

$$P = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 + (x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\} - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} + k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

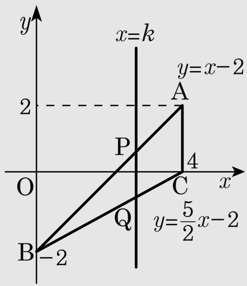
$x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

11. 세 점 A $(4,\ 2)$, B $(0,\ -2)$, C $(4,\ 0)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=k$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x=k$와 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P $(k,\ k-2)$, Q $\left(k,\ \dfrac{1}{2}k-2\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left\{(k-2)-\left(\dfrac{1}{2}k-2\right)\right\}\times k=2,\ k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}$ $(\because\ 0<k<4)$

12. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 ㉠, ㉡의 교점은 $(1,\ 2)$ 이다.

(i) ㉢이 점$(1,\ 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) ㉢이 ㉠과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

(iii) ㉢이 ㉡과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

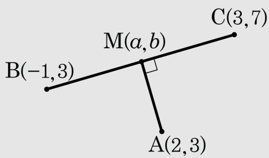
또는 $a=-\frac{2}{3}$ 이다.

13. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, 4ab 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$, $\therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

14. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4\cdots$㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot3}{2+1}, \dfrac{2b+1\cdot2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3}, \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{9}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

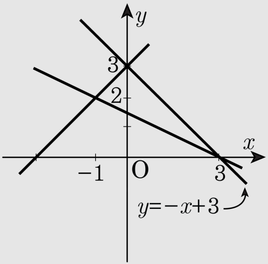
$\therefore\ 3a+b=5$

15. 두 직선 $y=-x+3$, $y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는
m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



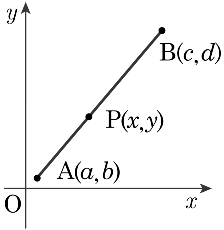
$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

16. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$를 이은 선분 위에 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 40$이고, $5x = 3a+2c$, $5y = 3b+2d$가 성립할 때, 선분 AP의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$5x = 3a + 2c$ 이므로 $x = \dfrac{3a+2c}{5} = \dfrac{2c+3a}{2+3}$

$5y = 3b + 2d$ 이므로 $y = \dfrac{3b+2d}{5} = \dfrac{2d+3b}{2+3}$

따라서 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

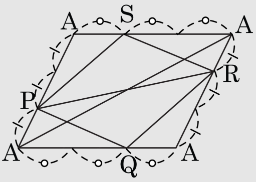
$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{5}\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{5}\cdot 40 = 16$

17. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. $\mathrm{A}(-1,5)$, $\mathrm{B}(-4,-1)$이고 $\mathrm{R}(7,6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1,6)$ ② $(1,7)$ ③ $(2,6)$ ④ $(2,7)$ ⑤ $(3,6)$

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.



$\mathrm{A}(-1,5)$, $\mathrm{B}(-4,-1)$이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{-8-1}{2+1}, \dfrac{-2+5}{2+1}\right)$

$\therefore \mathrm{P}(-3,1)$

$\mathrm{R}(7,6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-3+7}{2}, \dfrac{1+6}{2}\right)$

즉 $\left(2, \dfrac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠

이 때, 점 $\mathrm{D}(a,b)$로 놓으면
대각선 BD의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-4+a}{2}, \dfrac{-1+b}{2}\right) \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\dfrac{-4+a}{2}=2$에서 $a=8$

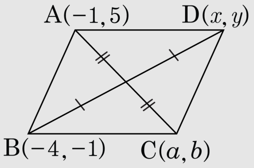
$\dfrac{-1+b}{2}=\dfrac{7}{2}$에서 $b=8$

따라서 점 $\mathrm{D}(8,8)$이므로
변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는

$\mathrm{S}\left(\dfrac{-2+8}{2+1}, \dfrac{10+8}{2+1}\right)$

즉 $\mathrm{S}(2,6)$

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를
$\mathrm{C}(a,b)$, $\mathrm{D}(x,y)$로 놓으면
$\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치하므로



$\dfrac{-1+a}{2}=\dfrac{-4+x}{2}$, $\dfrac{5+b}{2}=\dfrac{-1+y}{2}$에서

$x-a=3 \cdots$ ㉠

$y-b=6 \cdots$ ㉡

$\mathrm{R}(7,\ 6)$이므로 $\dfrac{2x+a}{3}=7$에서 $a+2x=21 \cdots$ ㉢

$\dfrac{2y+b}{3}=6$에서 $b+2y=18 \cdots$ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=5, x=8$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=2, y=8$

$\therefore \mathrm{D}(8,8)$

그러므로 변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는

$\mathrm{S}\left(\dfrac{-2+8}{2+1}, \dfrac{10+8}{2+1}\right)$

즉 $\mathrm{S}(2,6)$

18. 두 함수 $f(x)=x^2-6x$, $g(x)=mx+n$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $\mathrm{P}(2,\ 5)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$라 하면

$x^2-6x=mx+n$, $x^2-(m+6)x-n=0$의 두 근이 $x_1,\ x_2$이므로

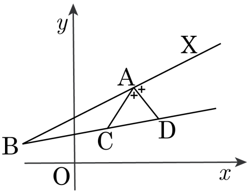
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1+x_2=m+6$이다.

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$와 $\mathrm{P}(2,\ 5)$의 무게중심이 $(4,\ 1)$이므로

$\dfrac{x_1+x_2+2}{3}=4$에서 $x_1+x_2=10$이므로

$m+6=10 \quad \therefore\ m=4$

19. 다음 좌표평면에서 세 점 A(7, 6), B(−5, 1), C(3, 3) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 BA 의 연장선 위에 한 점 X 를 잡고, ∠XAC 의 이등분선이 변 BC 의 연장선과 만나는 교점을 D(x, y) 라 할 때, $x+4y$ 의 값을 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

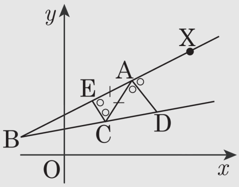
그림과 같이 점 C 에서 $\overline{AD}$ 와 평행하게 $\overline{CE}$ 를 그리면

$\angle AEC = \angle ACE$ 가 되어 $\overline{CA} = \overline{EA}$ 가 성립한다.

$\overline{BA} : \overline{EA}(\overline{CA}) = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{BA} = \sqrt{(7+5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{CA} = \sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$



따라서 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5 로 외분하는 점이다.

$$x = \frac{13\times3-5\times(-5)}{13-5} = 8,$$

$$y = \frac{13\times3-5\times1}{13-5} = \frac{17}{4}$$

$$\therefore x+4y = 8+4\times\frac{17}{4} = 25$$

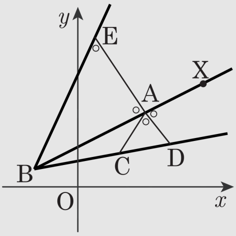
해설

다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 평행이 되게 점 B 에서 그린 직선과 $\overline{AD}$ 의 연장선과의 교점을 E 라 하면 $\triangle ACD$ 와 $\triangle EBD$ 는 닮음이고, $\triangle ABE$ 는 이등변삼각형이다.

$\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{AB}$

즉, 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 로 외분하는 점이다.

(이하는 위의 해설과 같은 과정이다.)



20. 점 A$(3,\ -1)$과 직선 $x+y-3=0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x+2y-5=0$　　② $2x-2y+5=0$

③ $2x-y-5=0$　　④ $x+y-5=0$

⑤ $2x+2y-5=0$

해설

$x+y-3=0$ 위의 임의의 한 점을 P$(a,\ -a+3)$ 이라 하고

$\overline{\mathrm{AP}}$ 의 중점의 좌표를 Q $(x,\ y)$ 라 하면

$$x=\frac{a+3}{2},\quad y=\frac{-a+2}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\quad a=-2y+2$

$\therefore\ 2x-3=-2y+2$

$\therefore\ 2x+2y-5=0$

21. 점 (2, 3) 을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$라 하자. 이 때, 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은?(단, O 는 원점이고 $a,\ b$ 는 양수이다.)

① 8　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 16

해설

x절편, y절편이 각각 $(a,\ 0),\ (0,\ b)$이므로

직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$이다.

이 때, 점(2, 3) 을 지나므로

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\ge 2\sqrt{\frac{2}{a}\times\frac{3}{b}}$$

($\therefore$ a70, b70산술기하평균)

따라서 $ab\ge 24$ 이고

$$\Delta\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\ge\frac{1}{2}\times 24=12 \text{ 이다.}$$

따라서, $\triangle$OAB 의 넓이의 최솟값은 12

22. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x-3y+2=0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

> i. l 과 l' 은 만나지 않는다.
> ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 이다.
> iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x-3y+15=0$　② $2x-3y-13=0$
③ $2x-3y-11=0$　④ $3x+2y+11=0$
⑤ $3x+2y+13=0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x-3y+c=0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.

즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\sqrt{13}$, $|-2+c|=13$

$-2+c=\pm 13$　$\therefore\ c=15$ 또는 $c=-11$

$\therefore\ l' : 2x-3y+15=0$ 또는 $l' : 2x-3y-11=0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서

l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은

$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선

l' 의 방정식은 $l' : 2x-3y-11=0$

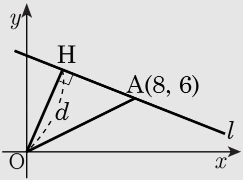
23. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \le \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \le \overline{OA} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$

$\therefore\ d \le 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

24. x, y 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

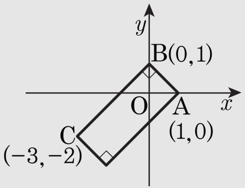
① 2 ② 6 ③ 8 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2\cdots$ ㉠ 이고, x, y 는 정수이므로

㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$, $(-2,-3)$, $(-3,-2)$ 이다.

네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

25. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y = \pm\frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$