

1. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 4$$

$$\therefore x + y = 6$$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$$

$$y^2 - 8y + 16 \leq 0$$

$$(y - 4)^2 \leq 0, y = 4$$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

2. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

3. 방정식 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $f(x) = ax^2 + bx + 12 (a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega) = 3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12

② -12

③ 15

④ -15

⑤ 18

해설

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2 + \omega + 2 = 0 \quad \therefore \omega^2 = -\omega - 2$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= a\omega^2 + b\omega + 12 = a(-\omega - 2) + b\omega + 12 \\ &= (b - a)\omega + (12 - 2a) \end{aligned}$$

$f(\omega) = 3\omega$ 이므로

$$(b - a)\omega + (12 - 2a) = 3\omega$$

$$b - a = 3, \quad 12 - 2a = 0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$$

$$\therefore a = 6, \quad b = 9$$

4. 방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때 $a^3 + b^3 - 3ab$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - \{1 + (a + b)^2\} \cdot 2 \geq 0$$

$$-(a + b)^2 - 2(a + b) - 1 \geq 0$$

양변에 -1 을 곱하면

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\{(a + b) + 1\}^2 \leq 0$$

그런데 a, b 가 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

$$\begin{aligned}\therefore a^3 + b^3 - 3ab &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) - 3ab \\ &= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab \\ &= -1\end{aligned}$$

5. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}x &= \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2} \\&= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}\end{aligned}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{\quad}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\text{즉, } 25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$$

$$\therefore -4a = \pm 20,$$

$$a = \pm 5$$

$\therefore$ 양수 a 는 5

6. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$ 가 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2

② -4

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

x 에 관해 식을 정리하면

$$f(x) = x^2 + (1 - y)x + (-6y^2 + 7y + k)$$

$f(x)$ 가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

$D = (1 - y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$ 가 완전제곱식이어야 한다.

$D = 25y^2 - 30y + (1 - 4k)$ 에서

$$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1 - 4k) = 0$$

$$\therefore k = -2$$

7. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

① $a = 3, b = -2$

② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$

③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$

④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$

⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -a \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = b \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$

이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$$

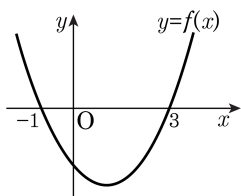
$$\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\textcircled{4} \text{에서 } \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$$

$$\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$$

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x - 1) = 0$ 의 두 근의 합은?



- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ ($a > 0$)으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이
므로

$$f(2x-1) = 0 \text{에서}$$

$$4ax(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 합은 2이다.

9. $x = -3$ 일 때 최댓값 4 를 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{16}{27}$

해설

$$\begin{aligned}y &= a(x+3)^2 + 4 \\&= a(x^2 + 6x + 9) + 4 \\&= ax^2 + 6ax + 9a + 4\end{aligned}$$

$$9a + 4 = 2, \quad 9a = -2 \text{ 이므로 } a = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$$

$$\therefore abc = \left(-\frac{2}{9}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times 2 = \frac{16}{27}$$

10. 두 함수 $f(x) = |x - 2| - 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 라고 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x) = |x - 2| - 5 = t$ 로 놓으면

$$y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t + 3)^2 - 1$$

그런데 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $-5 \leq t \leq -2$ 이므로

y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$$\therefore M = 3, m = -1$$

$$\therefore M + m = 2$$

11. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6$$

$$= 2(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) + 6$$

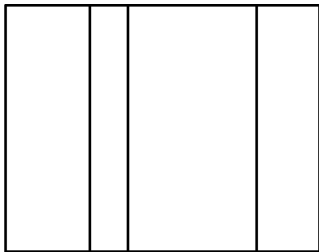
$$= 2(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3$$

x, y 는 실수이므로 $(x - 2)^2 \geq 0$, $(y + 1)^2 \geq 0$

$$\therefore 2x^2 - 8x + y^2 + 2y + 6 \geq -3$$

따라서, $x = 2, y = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

12. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m

② 70m

③ 80m

④ 90m

⑤ 100m

해설

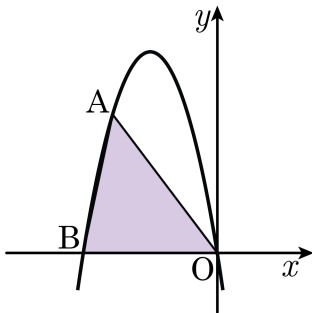
세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700 - 5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700 - 5x) \cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2 + 350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2 - 140x + 70^2 - 70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x - 70)^2 + 12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

13. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의 넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

14. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$ 라 할 때, $g(\alpha) \cdot g(\beta)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 8

④ 11

⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 1$

또, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$

$= (x^2 - 3x + 1)(x + 2) + 2x + 1$

α, β 는 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로

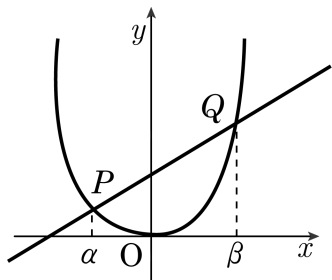
$g(\alpha) = 2\alpha + 1$, $g(\beta) = 2\beta + 1$

$\therefore g(\alpha)g(\beta) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1)$

$= 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1$

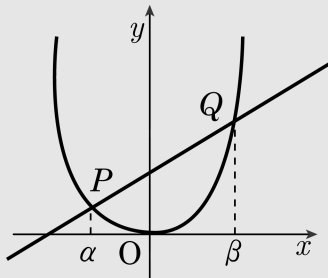
$= 4 + 6 + 1 = 11$

15. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = -3m$

$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1$, $-3m = -1$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

16. $a < -1$ 일 때, x 에 대한 방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수를 구하면? (단, 중근은 하나로 센다.)

- ① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

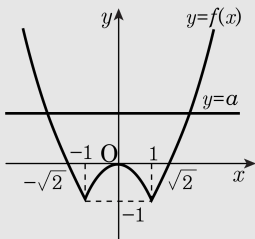
방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수는 $y = |x^2 - 1| - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

$$y = |x^2 - 1| - 1 \text{ 에서 } |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x^2 - 1 \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2 + 1 & (x^2 - 1 < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로 $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ 로 놓으면

(i) $x^2 - 1 \geq 0$, 즉 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2$$



(ii) $x^2 - 1 < 0$, 즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$$f(x) = -x^2 + 1 - 1 = -x^2$$

(i), (ii)로부터 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서, 구하는 실근의 개수는 a 의 값에 따라 다음과 같다.

$$\begin{cases} a < -1 \text{ 일 때, 없다.} \\ a = -1 \text{ 또는 } a > 0 \text{ 일 때, 2개} \\ a = 0 \text{ 일 때, 3개} \\ -1 < a < 0 \text{ 일 때, 4개} \end{cases}$$

17. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y = 2n^2 - 11n + 20$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$y = 2n^2 - 11n + 20$$

$$= 2 \left(n^2 - \frac{11}{2}n + \frac{121}{16} \right) - \frac{121}{8} + 20$$

$$= 2 \left(n - \frac{11}{4} \right)^2 + \frac{39}{8}$$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n = 3$ 일 때,

최솟값 $2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 20 = 5$ 를 갖는다.

18. 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 2a+4 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 의 최솟값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -(a+2), \alpha\beta = 2a+4 \text{ 이므로}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= (a+2)^2 - (2a+4) = a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1$$

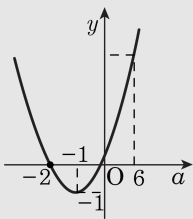
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$$D = (a+2)^2 - 4(2a+4) \geq 0$$

$$a^2 - 4a - 12 \geq 0, (a+2)(a-6) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2, a \geq 6$$

따라서, $y = (a+1)^2 - 1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



그러므로 $a = -2$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.

19. 원 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3 + 2\sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $3\sqrt{3}$

④ 6

⑤ $6 + \sqrt{2}$

해설

$\frac{y}{x} = t$ 라고 놓으면 $y = tx \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 을 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 에 대입하여 정리하면
 $(t^2 + 1)x^2 - 6(t+1)x + 12 = 0$

$\frac{D}{4} \geq 0$ 이므로 $9(t+1)^2 - 12(t^2 + 1) \geq 0$

$t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$\therefore 3 - 2\sqrt{2} \leq t \leq 3 + 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.