

1. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x = y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x = 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x + y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

3. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

② $x = 2, y = 1$

③ $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

④ $x = -2, y = -1$

⑤ $x = 2, y = -1$

해설

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm \sqrt{3}, \quad x = \mp \sqrt{3}$$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$$

$$\therefore \text{해는 } \begin{cases} x = \pm \sqrt{3} \\ y = \mp \sqrt{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad (\text{복호동순})$$

4. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x + 2y) = 0$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$ 일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5, y = \pm \sqrt{5}, x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

$\therefore$ 구하는 해는 $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}), (-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}),$

$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

5. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

1) $y = 2x$ 일 때

$$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20$$

$$\therefore x = \pm 2, y = \pm 4$$

2) $x = -2y$ 일 때

$$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$$

$$\therefore y = \pm 2, x = \mp 4$$

$$(x, y) = (2, 4), (-2, -4), (-4, 2), (4, -2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, -2, 2$$

그러므로 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 -6

6. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값의 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ -10 ⑤ -15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$ 에 $3x^2 + y = 6$ 대입.

$$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 1, \pm 2$$

$$x \text{의 합} : +1 - 1 + 2 - 2 = 0$$

7. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \dots \textcircled{A} \\ 2xy = y^2 - y & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

라 하면 $\textcircled{A}$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 ;

$\textcircled{B}$ 에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$ 일 때 ;

$\textcircled{B}$ 에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore y = 0, -\frac{1}{3}$

$\therefore = (0, 0), (0, 1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

8. $x = \alpha, y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \quad \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{ 불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1, x = \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 을 풀면 $x = \alpha, y = \beta$

또는 $x = \gamma, y = \delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x - y = -2$, 즉 $y = x + 2$

$\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1, -2$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = -2, y = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 6$$

10. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$$\therefore u = \pm 7, v = 12$$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

$$\text{또는} \begin{cases} x + y = -7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

(i) $\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = 3, y = 4$ 또는 $x = 4, y = 3$

(ii) $\textcircled{\text{A}}$, $\textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = -3, y = -4$ 또는 $x = -4, y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

11. a, b 는 실수라 한다. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + a^2x + b^2 - 2a = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + a^2\alpha + b^2 - 2a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 $(a^2 + 2a)\alpha - (a^2 + 2a) = 0$
 $\therefore (a^2 + 2a)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore a^2 + 2a = 0$ 또는 $\alpha = 1$
그런데 $a^2 + 2a = 0$ 일 때는 $a^2 = -2a$ 이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1 + a^2 + b^2 - 2a = 0$
 $\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0$
 a, b 는 실수이므로 $a - 1 = 0, b = 0$
 $\therefore a + b = 1$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z) = 10 \\ y(z+x) = 18 \\ z(x+y) = 24 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ 라 할 때,
 $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

- ① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z) = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ y(z+x) = 18 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ z(x+y) = 24 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} : 2(xy + yz + zx) = 52$

$\therefore xy + yz + zx = 26$

$\therefore xy = 2, yz = 16, zx = 8 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤}$ 에서 $(xyz)^2 = 16^2 \therefore xyz = \pm 16$

$\therefore x = \alpha = \pm 1, y = \beta = \pm 2, z = \gamma = \pm 8$ (복부호동순)

$\therefore \alpha\beta\gamma = \pm 16$

14. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

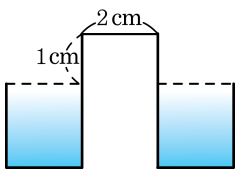
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \dots\dots\textcircled{1}$
 $\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \dots\dots\textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $(k - 1)\alpha - 3(k - 1) = 0$,
 $(k - 1)(\alpha - 3) = 0$
(i) $k = 1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2 + x + 3 = 0$ 으로 일치하여
공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.
(ii) $\alpha = 3$ 인 경우 $9 + 3k + 3 = 0 \therefore k = -4$
 $\therefore \alpha - k = 7$

15. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ① 125 cm^2 ② 288 cm^2 ③ 350 cm^2
 ④ 420 cm^2 ⑤ 120 cm^2

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a , 가로 길이를 b 라 하면
 총길이는 $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$ 에서
 $4a + 2b = 96$
 $\therefore 2a + b = 48$ 이므로 $b = 48 - 2a$
 한 개 단면의 넓이는 ab 이므로
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$
 $= -2(a^2 - 24a)$
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$
 $= -2(a - 12)^2 + 288$
 따라서 $a = 12$ 일 때 최대 넓이 288 cm^2