1. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5,\ 2x^2+2x-4=0,$

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2,$

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2,\ \beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x-y)(x-2y)$

$\Rightarrow \quad (x-y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

3. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3},\ y = -\sqrt{3}$

② $x = 2,\ y = 1$

③ $x = -\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}$

④ $x = -2,\ y = -1$

⑤ $x = 2,\ y = -1$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y\ 2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y\ 2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해는 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ (복호동순)

4. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x+2y) = 0$

i) $x = y$일 때

$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ii) $x = -2y$일 때

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5,\ y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$ (복호동순)

$\therefore$ 구하는 해는 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$,

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5})$, $(2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

5. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20$

$\therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$

$(x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

6. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ −10 ⑤ −15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$에 $3x^2 + y = 6$ 대입.

$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

$x = \pm 1,\ \pm 2$

x의 합 : $+1 - 1 + 2 - 2 = 0$

7. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$일 때;

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$일 때;

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0, -\dfrac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

8. $x=\alpha,\ y=\beta$가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 \end{cases}$$ 의 해일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2-xy-2y^2=-2 & \cdots ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=-3 & \cdots ② \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ①$\times 3-$②$\times 2$하면

$x^2-3xy+2y^2=0,\ (x-2y)(x-y)=0,$

$x=2y\ or\ x=y$

$x=2y$를 ① 식에 대입하면

$4y^2-2y^2-2y^2=-2,\ 0=-2$불능

$x=y$를 ①식에 대입하면

$y^2-y^2-2y^2=-2$

$y^2=1,\ \ y\pm 1,\ \ x\pm 1$

$\therefore\ \ \alpha^2+\beta^2=1+1=2$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

10. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㄷ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㄹ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$

(i) ㄷ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㄹ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 해의 합은 0

11. a, b는 실수라 한다. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+a^2x+b^2-2a=0$, $x^2-2ax+a^2+b^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0 \quad \cdots ①$

$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0 \quad \cdots ②$

① − ② 하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$

$\therefore \ (a^2+2a)(\alpha-1)=0$

$\therefore \ a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $a^2+2a=0$일 때는 $a^2=-2a$이므로

두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.

$\therefore \ \alpha=1$

①에 대입하면 $1+a^2+b^2-2a=0$

$\therefore \ (a-1)^2+b^2=0$

a, b는 실수이므로 $a-1=0$, $b=0$

$\therefore \ a+b=1$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x, y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=-x+2a$ 를 ②에 대입하면

$x(-x+2a)=a$

$\therefore -x^2+2ax=a$ 즉 $x^2-2ax+a=0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4=a^2-a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$a=1$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2 \qquad \therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

14. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2+\alpha+3k=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

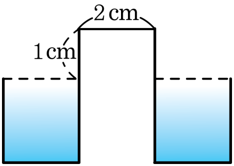
$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0 \quad \therefore\ k=-4$

$\therefore\ \alpha-k=7$

15. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,\text{cm}^2$　② $288\,\text{cm}^2$　③ $350\,\text{cm}^2$

④ $420\,\text{cm}^2$　⑤ $120\,\text{cm}^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면

총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서

$4a+2b=96$

$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$

한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$
\begin{aligned}
a(48-2a) &= -2a^2+48a \\
&= -2(a^2-24a) \\
&= -2(a^2+24a+144-144) \\
&= -2(a-12)^2+288
\end{aligned}
$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,\text{cm}^2$