

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 두 점 A(1,3) B(4,0) 을 잇는 선분 AB 를 2 : 1 로내분하는 점 P 와
외분하는 점 Q라 할 때 선분 PQ의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

내분점, 외분점을 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2 + 1} \right) = (3, 1) \quad Q =$$

$$\left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times 3}{2 - 1} \right) = (7, -3)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

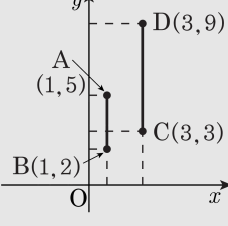
3. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \leq f(1) \leq 5$, $3 \leq f(3) \leq 9$ 라고 할 때, a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① 2
- ② $\frac{5}{2}$
- ③ 3
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고

a 는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a 의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고

a 의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$$\overline{BD} \text{의 기울기} = \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$$

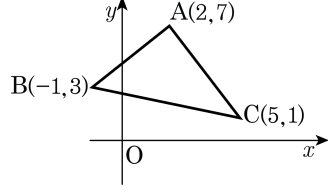
$$\overline{AC} \text{의 기울기} = \frac{3-5}{3-1} = -1$$

$$\therefore \text{최댓값} + \text{최솟값} = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$$\therefore -1 \leq a \leq \frac{7}{2}$$

4. 세 점 A(2, 7), B(-1, 3), C(5, 1)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



- ① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$
 ④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로 점 A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$$

따라서, 두 점(2, 7) 과(2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

5. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

- ① $a + b + c = 0$ ② $a + b + c = 1$ ③ $abc = 1$
④ $a + c = 2b$ ⑤ $ac = b^2$

해설

서로 다른 세 점 $A(a, a^3)$, $B(b, b^3)$, $C(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - a^3}{c - a}$$

$$\text{즉, } b^2 + ab + a^2 = c^2 + ac + a^2$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0 \text{ 에서 } b \neq c \text{ 이므로}$$

$$a + b + c = 0$$

6. 두 직선 $3x - 2y + 1 = 0$, $ax + 4y - 3 = 0$ 이 평행할 때의 a 값과 수직일 때 a 값의 곱은?

① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1

해설

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ 에서 } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{A}$$

$$ax + 4y - 3 = 0 \text{ 에서 } y = -\frac{a}{4}x + \frac{3}{4} \dots\dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 이 평행일 때, } \frac{3}{2} = -\frac{a}{4} \quad \therefore a = -6$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ 이 수직일 때, } \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) = -1 \quad \therefore a = \frac{8}{3}$$

$$\therefore (-6) \times \frac{8}{3} = -16$$

7. 두 직선 $2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 의 교점과 $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x - y + 3 = 0$

② $x + y - 6 = 0$

③ $4x - y + 1 = 0$

④ $x + 2y - 11 = 0$

⑤ $3x - 2y + 7 = 0$

해설

$2x + y + 5 = 0$, $3x - 2y + 4 = 0$ 을

연립하여 교점을 구한다.

$\Rightarrow (-2, -1)$

$\therefore (-2, -1)$, $(1, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{5 - (-1)}{1 - (-2)}(x - 1) + 5 = 2x + 3$$

$\therefore 2x - y + 3 = 0$

8. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\frac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$

$\therefore k = 0$

이때, $x = 1, y = 1$ 이므로

구하는 점은 $(1, 1)$

$\therefore a = 1, b = 1$

$\therefore a + b = 2$

9. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는
 $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$
(ii) $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$
(iii) $0 \leq x < 1$, $f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$
(iv) $1 \leq x < 3$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$
(v) $3 \leq x < 5$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$
(vi) $5 \leq x$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$

이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.
 $\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$

10. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (0, 0) ② (1, 0) ③ (2, 0) ④ (3, 0) ⑤ (4, 0)

해설

P의 좌표를 $(x, 0)$ 라 하면

$$\sqrt{(-3-x)^2+2^2} = \sqrt{(4-x)^2+5^2}$$

$$6x+13 = -8x+41, \quad x=2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

11. 두 점 A(2, 0), B(0, 2) 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① $C(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$ 또는 $C(1 - \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$

② $C(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5})$

③ $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

④ $C(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 0)$

⑤ $C(0, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C 를 (x, y) 라 놓자.

$$\overline{AB}^2 = (2 - 0)^2 + (0 - 2)^2 = 8$$

$$\overline{BC}^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\overline{CA}^2 = (x - 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 에서}$$

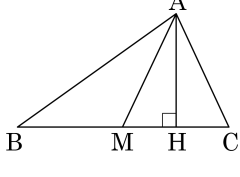
$$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$x = y \text{ 이므로 } 2x^2 - 4x - 4 = 0, x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

따라서 꼭짓점 C 의 좌표는 $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ 또는 $C(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$

12. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.

직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$
④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$
⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

13. 좌표평면 위의 점 A (1, 2)에서 x 축 위의 점 P를 지나 점 B(5, 1)를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3

② 4

③ 5

④ 7

⑤ 8

해설

점 A를 x 축에 대해 대칭시키는

새로운 점 A' (1, -2)에 대해

선분 A'B의 거리를 구하면 된다.

$$\overline{A'B} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$$

14. 세 점 A(4, 6), B(2, 0), C(6, -2)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형이 되게 하는 점 D의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는 (5, 2)

$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

평행사변형의 성질에 의하여 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 중점은 일치해야 하므로

$$\frac{2+a}{2} = 5, \frac{b}{2} = 2$$

$$\therefore a = 8, b = 4$$

$$\therefore a + b = 12$$

15. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

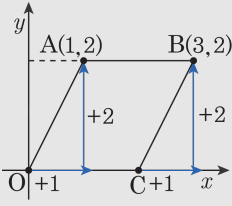
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



16. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2 + 1},$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2 + 1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

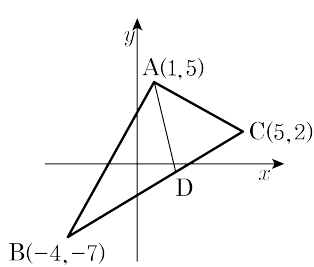
점 Q, R 도 마찬가지로 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} + 1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

17. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(-4, -7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
 ③ $(2, -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

$$\therefore D\left(\frac{-20+65}{13+5}, \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

18. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

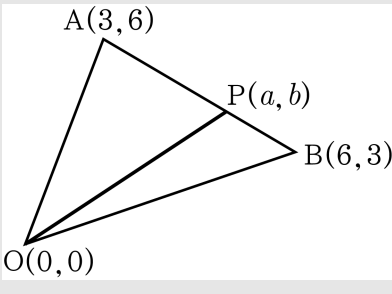
해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이려면 P 는 두 점 A, B 를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

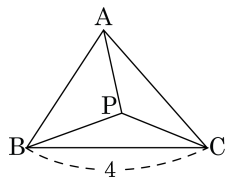
따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



19. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x 축,
 $\overline{BC}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y 축으로 잡으면

$A(0, 2\sqrt{3}), B(-2, 0), C(2, 0)$

$P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

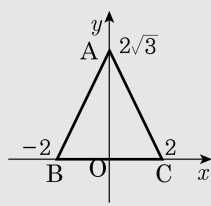
$$= x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 + (x + 2)^2 + y^2 + (x - 2)^2 + y^2$$

$$= 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{3}y + 20$$

$$= 3x^2 + 3\left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 16$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 은

$x = 0, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16을 갖는다.



20. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ㉠ P $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ㉡ P (-1, -1) ㉢ P (0, 0)
㉣ P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ㉤ P (1, 1)

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

21. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

22. 두 직선 $x + y - 1 = 0$ 과 $mx - y + m - 2 = 0$ 이 제1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{2} < m < 2$ ② $\frac{1}{2} < m < 3$ ③ $1 < m < 2$
④ $1 < m < 3$ ⑤ $2 < m < 4$

해설

$mx - y + m - 2 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x + 1)m - y - 2 = 0$ 이므로 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-1, -2)$ 를 지난다.
또, 직선 $x + y - 1 = 0$ 의 x 절편은 1, y 절편은 1이다.
따라서 두 직선이 제1사분면에서 만나려면
직선 $(x + 1)m - y - 2 = 0$ 이 점 $(0, 1)$ 을 지나는
직선과 점 $(1, 0)$ 을 지나는 직선 사이에 있어야 한다.
직선 $(x + 1)m - y - 2 = 0$ 에 대하여
(i) 점 $(0, 1)$ 을 지날 때, $m - 1 - 2 = 0$
 $\therefore m = 3$
(ii) 점 $(1, 0)$ 을 지날 때, $2m - 2 = 0$
 $\therefore m = 1$
(i), (ii)에 의하여 $1 < m < 3$

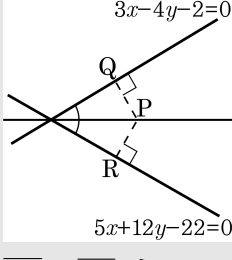
23. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

24. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?
- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를 P(X, Y)라 하면,
 $P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
 $X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$
 $\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$
이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면
 $2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$
 $4X + 2Y - 3 = 0$
 $\therefore 4x + 2y - 3 = 0$

25. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, A(2, 1), B(0, -1)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① P(1, 0)

② P(0, 1)

③ P(-1, 0)

④ P(0, -1)

⑤ P(0, 0)

해설

점 $P(a, 2a + 1)$ 라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$$

$$-4a + 4 = 8a + 4$$

$$\therefore a = 0$$

$$\therefore P(0, 1)$$

26. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p , 3), C(1, q) 인 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 (2, 1)일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2 \text{에서 } (p-2)^2 = 1$$

$$\therefore p = 1, 3$$

그런데 $p = 1$ 일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1 \therefore p = 3$

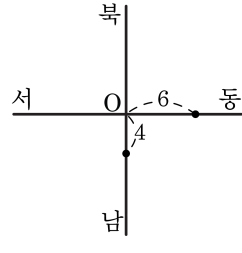
$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2 \text{에서 } (q-1)^2 = 4$$

$$\therefore q = 3, -1$$

그런데 $q = 3$ 일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$$\therefore pq = 3 \times (-1) = -3$$

27. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 $A(6, 0)$, $B(0, -4)$ 이고 t 시간 후의 A,B 의 좌표는 $A(6 - 4t, 0)$, $B(0, -4 + 2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6 - 4t)^2 + (-4 + 2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 64t + 52} = \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} = \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. $\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

28. A(2,2)인 정삼각형 ABC가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

- ① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

무게중심은 그림처럼 중선을 2 : 1로 내분한다.

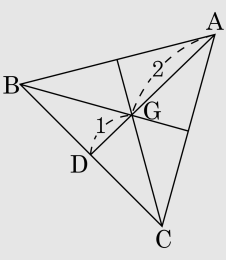
$$\therefore \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

그리고 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므

로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{6}$$



29. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a > 0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
 $ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.
i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
 $a=-2$ 또는 1 $\therefore a=1$ ($\because a > 0$)
ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
 $2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 (-1, 1)
 $ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
 $a=-1$ (부적당)
i), ii)에서 $a=1$

30. 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = kx + 2k + 1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때,

k 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}$
- ② $-\frac{3}{2} < k < \frac{1}{2}$
- ③ $-\frac{1}{6} < k < 2$
- ④ $-\frac{1}{6} < k < 1$
- ⑤ $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$

해설

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \cdots \textcircled{A}$$

$$y = kx + 2k + 1 \cdots \textcircled{B}$$

② 을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x + 2) + (1 - y) = 0 \text{ 이므로}$$

k 의 값에 관계없이 정점 $C(-2, 1)$ 을 지난다.

①, ②이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ②이 지나야 한다.

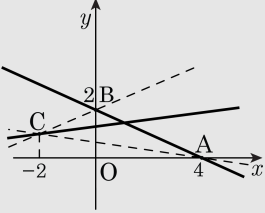
$\overline{AC}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k 는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1 사분면에서 만난다.

$$\therefore -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{2}$$



31. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O로부터 동쪽으로 6 km, 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O로부터 동쪽으로 5 km, 북쪽으로 4 km의 위치에 마을 P가 있다. 이 때, 마을 P에서 강까지의 최단 거리를 구하시오. (단위는 km)

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O를 원점 O로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.

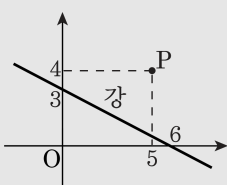
강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \text{ 즉, } x + 2y - 6 = 0$$

이때, 마을 P의 좌표는 (5, 4)이다.

따라서, 점 (5, 4)에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} (km)$$



32. 좌표평면 위의 점 A(-1, 0) 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B(0, 2) 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

- ㉠ $-\frac{1}{2}$ ㉡ $-\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ $\frac{1}{2}$ ㉤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x + 1)$

$$\therefore mx - y + m = 0$$

점 B(0, 2) 에서

$$\text{직선 } l \text{ 까지의 거리는 } \frac{|-2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m + 1)^2 = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2}$$

33. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x - y + 2 - k(x + y) = 0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3 - k)x - (1 + k)y + 2 = 0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3 - k)^2 + (1 + k)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$$2k^2 - 4k + 10 = 2(k - 1)^2 + 8 \geq 8 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2 - 4k + 10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{ 최대값 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

34. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 넓이 S 가 $S = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

선분 AB의 길이

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{이고, 두 점 A, B를 지나는}$$

직선의 기울기가 $\left(\frac{\uparrow}{\downarrow}\right)$ 이므로, 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \left(\frac{\uparrow}{\downarrow}\right)(x - x_1) \cdots \textcircled{1}$$

이 때, 점 C와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\left(\frac{\uparrow}{\downarrow}\right)}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)| \text{이다.}$$

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?
(가) (나)

- ① $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}}$
- ② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}}$
- ③ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$
- ④ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$
- ⑤ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}}$

11

$$(가) \quad \frac{(y \text{의 증가량})}{(x \text{의 증가량})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(나) 점 (x_1, y_1) 에서 직선

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ 〇 } | \text{ ㄷ }.$$