1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

2. 두 점 $A(1,3)$ $B(4,0)$ 을 잇는 선분 AB 를 2 : 1 로내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q라 할 때 선분 PQ의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

내분점, 외분점을 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1}, \frac{2\times0+1\times3}{2+1}\right) = (3,1) \quad Q = \left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1}, \frac{2\times0-1\times3}{2-1}\right) = (7, -3)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

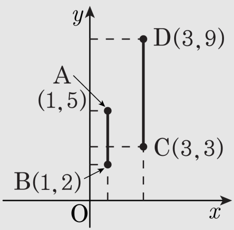
3. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고

a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고

a의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$\overline{BD}$ 의 기울기$= \dfrac{9-2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

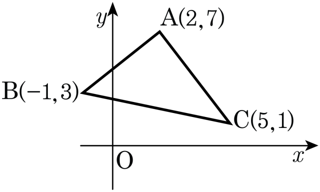
$\overline{AC}$ 의 기울기$= \dfrac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \quad -1 \le a \le \dfrac{7}{2}$

4. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$ ② $x+y-2=0$ ③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$ ⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로

점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

5. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$ ② $a+b+c=1$ ③ $abc=1$

④ $a+c=2b$ ⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB 의 기울기와 직선 AC 의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3-a^3}{b-a} = \frac{c^3-a^3}{c-a}$$

즉, $b^2+ab+a^2 = c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

6. 두 직선 $3x-2y+1=0$, $ax+4y-3=0$이 평행할 때의 a 값과 수직일 때 a 값의 곱은?

① -16　② -12　③ -8　④ -4　⑤ -1

해설

$3x-2y+1=0$에서 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ ······ ㉠

$ax+4y-3=0$에서 $y=-\frac{a}{4}x+\frac{3}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡이 평행일 때, $\frac{3}{2}=-\frac{a}{4}$　$\therefore a=-6$

㉠, ㉡이 수직일 때, $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)=-1$　$\therefore a=\frac{8}{3}$

$\therefore (-6)\times\frac{8}{3}=-16$

7. 두 직선 $2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$의 교점과 $(1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x-y+3=0$　② $x+y-6=0$

③ $4x-y+1=0$　④ $x+2y-11=0$

⑤ $3x-2y+7=0$

해설

$2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$을
연립하여 교점을 구한다.

$\Rightarrow\ (-2,-1)$

$\therefore\ (-2,-1)$, $(1,5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{5-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+5=2x+3$$

$\therefore\ 2x-y+3=0$

8. 포물선 $y=x^2-x+1$ 위의 점 중에서 직선 $y=x-3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y=x-3$ 에 평행인 직선 $y=x+k$ 와
포물선 $y=x^2-x+1$ 과의 접점이 구하는 점이다.

$x^2-x+1=x+k$ 에서 $\frac{D}{4}=1-(1-k)=0$

$\therefore\ k=0$

이때, $x=1,\ y=1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$

9. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E 까지의 거리 $f(x)$는
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3| + |x-5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x-1-x-x+1-x+3-x+5 = -5x+8$
(ii) $-1 \le x < 0$, $f(x) = x+1-x-x+1-x+3-x+5$
$= -3x+10$
(iii) $0 \le x < 1$, $f(x) = x+1+x-x+1-x+3-x+5 = -x+10$
(iv) $1 \le x < 3$, $f(x) = x+1+x+x-1-x+3-x+5 = x+8$
(v) $3 \le x < 5$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3-x+5 = 3x+2$
(vi) $5 \le x$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3+x-5 = 5x-8$
이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x=1$인 경우 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$\therefore\ f(1) = |1+1| + |1| + |1-1| + |1-3| + |1-5| = 9$

10. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$, $\mathrm{B}(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$　② $(1, 0)$　③ $(2, 0)$　④ $(3, 0)$　⑤ $(4, 0)$

해설

P의 좌표를 $(x,\ 0)$라 하면

$\sqrt{(-3-x)^2+2^2} = \sqrt{(4-x)^2+5^2}$

$6x+13=-8x+41, \quad x=2$

$\therefore \mathrm{P}=(2, 0)$

11. 두 점 $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① $C(1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$ 또는 $C(1-\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

② $C(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

③ $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

④ $C(2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 0)$

⑤ $C(0,\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C를 $(x,\ y)$라 놓자.

$\overline{AB}^2 = (2-0)^2 + (0-2)^2 = 8$

$\overline{BC}^2 = (x-0)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$

$\overline{CA}^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서

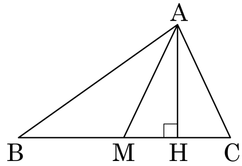
$8 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4$

$x = y$ 이므로 $2x^2 - 4x - 4 = 0$, $x^2 - 2x - 2 = 0$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3}$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

12. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서
$\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots$ ㉠
직각삼각형 AHC 에서
$\overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$
$= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2$
$= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

13. 좌표평면 위의 점 A(1, 2)에서 x축 위의 점 P를 지나 점 B(5, 1)를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

점 A를 x축에 대해 대칭시키는 새로운 점 A′(1, −2)에 대해 선분 A′B의 거리를 구하면 된다.

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$

14. 세 점 A(4, 6), B(2, 0), C(6, -2)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되게 하는 점 D의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 (5, 2)

$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{2+a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$이다.

평행사변형의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점은 일치해야 하므로

$\dfrac{2+a}{2}=5,\ \dfrac{b}{2}=2$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

$\therefore\ a+b=12$

15. O(0, 0), A(1, 2), B(3, 2) 일 때, 평행사변형 OABC 의 넓이를 구하면?

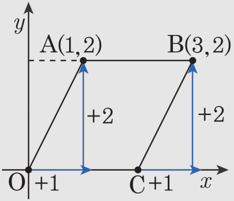
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{OA} \,//\, \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 B도 점 C를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



$\therefore$ C $= (2,\ 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$

16. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1), B(1,3)$ 에 대하여 선분 $\overline{OA}, \overline{AB}, \overline{BO}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1},$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2+1}$$

$$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$$

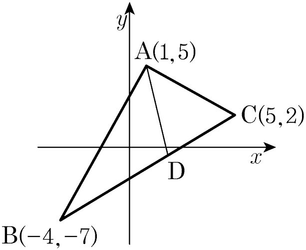
점 Q, R 도 마찬가지 방법으로 계산하면

$$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3}+\frac{7}{3}+1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

17. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(−4, −7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. ∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$

③ $(2,\ -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4},\ -\frac{5}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

해설

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2} = 13$

$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2} = 5$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$

$\therefore\ D\left(\frac{-20+65}{13+5},\ \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

18. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(3,6), \mathrm{B}(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로

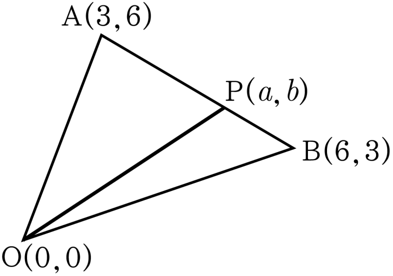
$\triangle\mathrm{OAP} = 2\triangle\mathrm{OBP}$ 이려면

P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.

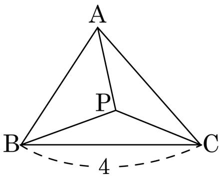
따라서 $\mathrm{P}\left(\dfrac{12+3}{3}, \dfrac{6+6}{3}\right)$

즉 $\mathrm{P}(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



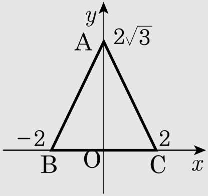
19. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 의 임의의 내부의 한 점 P 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



① 16　② 17　③ 18
④ 19　⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC 를 x축,
$\overline{BC}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO 를 y축으로 잡으면
$A\left(0, 2\sqrt{3}\right), B(-2, 0), C(2, 0)$



$P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$$
$$= x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$$
$$= 3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$$
$$= 3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 은

$x=0, y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16 을 갖는다.

20. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $P(-1, -1)$ ③ $P(0, 0)$
④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

21. 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4-2\times1}{1-2}, \dfrac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로

$y - 6 = 1\cdot(x+2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

22. 두 직선 $x+y-1=0$과 $mx-y+m-2=0$이 제1사분면에서 만날 때, m의 값의 범위는?

① $\frac{1}{2}<m<2$ ② $\frac{1}{2}<m<3$ ③ $1<m<2$

④ $1<m<3$ ⑤ $2<m<4$

해설

$mx-y+m-2=0$을 m에 대하여 정리하면
$(x+1)m-y-2=0$이므로 m의 값에 관계없이
항상 점 $(-1,-2)$를 지난다.
또, 직선 $x+y-1=0$의 x절편은 1, y절편은 1이다.
따라서 두 직선이 제1사분면에서 만나려면
직선 $(x+1)m-y-2=0$이 점 $(0,1)$을 지나는
직선과 점 $(1,0)$을 지나는 직선 사이에 있어야 한다.
직선 $(x+1)m-y-2=0$에 대하여
(ⅰ) 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, $m-1-2=0$
$\therefore\ m=3$
(ⅱ) 점 $(1,\ 0)$을 지날 때, $2m-2=0$
$\therefore\ m=1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $1<m<3$

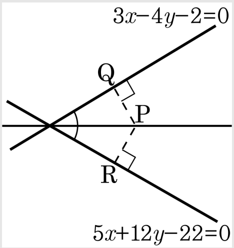
23. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

24. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$
② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$
④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

25. 직선 $y=2x+1$ 위에 있고, $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(1,\ 0)$　② $\mathrm{P}(0,\ 1)$　③ $\mathrm{P}(-1,\ 0)$

④ $\mathrm{P}(0,\ -1)$　⑤ $\mathrm{P}(0,\ 0)$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{(a-2)^2+4a^2}=\sqrt{a^2+4(a+1)^2}$

$-4a+4=8a+4$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 1)$

26. 세 꼭짓점이 $A(1,\ 3)$, $B(p,\ 3)$, $C(1,\ q)$ 인 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 $(2,\ 1)$ 일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-p)^2+(1-3)^2$ 에서 $(p-2)^2=1$

$\therefore\ p=1,\ 3$

그런데 $p=1$ 일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p=3$

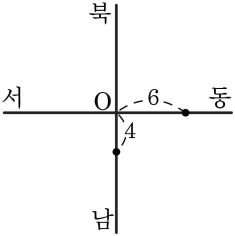
$(2-1)^2+(1-3)^2=(2-1)^2+(1-q)^2$ 에서 $(q-1)^2=4$

$\therefore\ q=3,\ -1$

그런데 $q=3$ 일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$\therefore\ pq=3\times(-1)=-3$

27. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

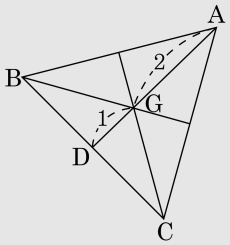
동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

28. $A(2,2)$인 정삼각형 ABC가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

무게중심은 그림처럼 중선을 $2:1$로 내분한다.



$\therefore \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

그리고 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$

$\therefore a = 2\sqrt{6}$

29. 세 직선 $2x+y+1=0,\ x-y+2=0,\ ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

ⅰ) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 $-2,\ 1$ 이므로
$a=-2$ 또는 1 $\therefore\ a=1\ (\because a>0)$

ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

ⅰ), ⅱ) 에서 $a=1$

30. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

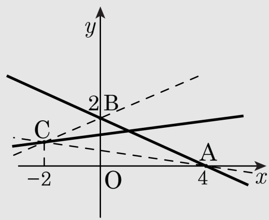
① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$　② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{6}<k<2$

④ $-\frac{1}{6}<k<1$　⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설

$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠

$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡



㉡ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로

k 의 값에 관계없이 정점 C$(-2,\ 1)$ 을 지난다.

㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

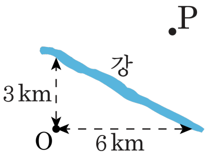
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1사분면에서 만난다.

$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

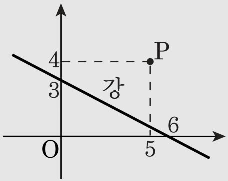
31. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5 + 8 - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

32. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B$(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y=m(x+1)$

$\therefore\ mx-y+m=0$

점 B$(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-\dfrac{1}{2}$

33. 좌표평면 위의 원점에서 직선$3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8\geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}\leq\frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. 다음은 서로 다른 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이 S가 $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

> 선분 AB의 길이
> $\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\boxed{(가)}$ 이므로, 직선의 방정식은
> $y - y_1 = \boxed{(가)}(x - x_1) \cdots ㉠$
> 이 때, 점 C와 직선 ㉠사이의 거리 d는
> $d = \dfrac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\boxed{(나)}}$
> 따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는
> $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 이다.

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)
①	$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,	$\sqrt{(x_1-y_2)^2+(x_2-y_1)^2}$
②	$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,	$\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}$
③	$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$,	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
④	$\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$,	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
⑤	$\dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$,	$\sqrt{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}$

해설

(가) $\dfrac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(나) 점 $(x_1,\ y_1)$에서 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d는

$d = \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 임을 이용하면

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.