1. 함수 $y = f(x)$ 에서 $y = x^2 + 3x - 4$ 일 때, $f(f(f(1)))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(1) = 1^2 + 3 - 4 = 0$
$f(f(1)) = f(0) = -4$
$\therefore f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(-4) = 0$

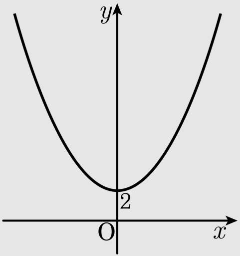
2. 다음 중 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2+2$ 의 y의 값의 범위는?

① $y \geq 2$　　② $y \leq 2$　　③ $y \geq -8$

④ $y \leq -8$　　⑤ $y \geq 0$

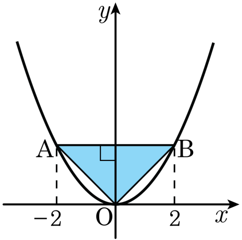
해설

$y=\frac{1}{4}x^2+2$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 y의 값의 범위는 $y \geq 2$ 이다.

3. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프이다. 이때, $\triangle$AOB 의 넓이는 얼마인가?



① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$ 이고,

$x = 2$ 를 대입하면 $y = 2$ 이므로

$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

4. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

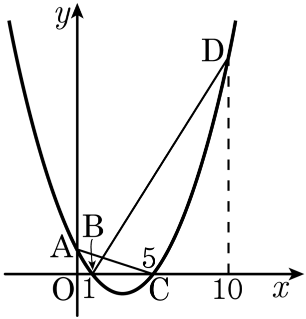
$$y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b\ ,$$

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4} + b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} + b = 0$,

$$b = \frac{a^2}{4}\ ,$$

$$\frac{a^2}{b} = a^2 \times \frac{1}{b} = a^2 \times \frac{4}{a^2} = 4$$

5. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5-1) \times c = 12$ 이다.

$c = 6$, 즉 $A(0, 6)$ 이다.

$y = ax^2 + bx + 6 = a(x-1)(x-5) = ax^2 - 6ax + 5a$ 이다.

$5a = 6$, $a = \frac{6}{5}$, $b = -\frac{36}{5}$ 이다.

$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6$ 이므로 $D(10, 54)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 54 = 108$

6. 세 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ 8)$을 지나는 이차함수의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, 이차함수 $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

㉠ 아래로 볼록한 형태의 그래프이다.

㉡ y 절편은 3 이다.

㉢ x 절편은 두 개이다.

㉣ 왼쪽 위를 향하는 포물선 그래프이다.

㉤ 왼쪽 위를 향한다.

① ㉠,㉡ ② ㉡,㉢ ③ ㉡,㉤ ④ ㉢,㉣ ⑤ ㉣,㉤

해설

세 점 $(0,\ -4)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ 8)$을 지나므로

$-4 = c$

$-1 = a + b + c$

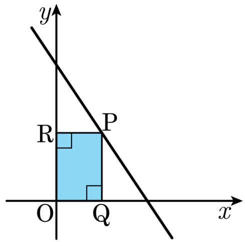
$8 = 4a + 2b + c$

세 식을 연립하면, $a = 3$, $b = 0$, $c = -4$ 이다.

따라서 $y = bx^2 + cx + a$ 는

$y = -4x + 3$ 이고, 이 함수의 그래프는 y 절편이 3 이고 왼쪽 위를 향하는 직선이다.

7. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

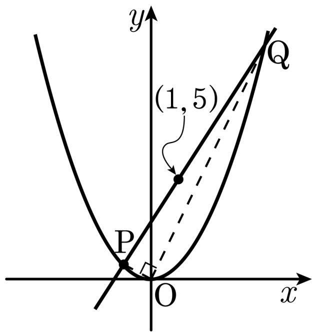
$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

8. 다음 그림과 같이 점 $(1,\ 5)$를 지나는 직선이 포물선 $y=x^2$과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle\mathrm{POQ}=90°$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



① $y=x+4$ ② $y=2x+3$ ③ $y=3x+2$

④ $y=4x+1$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a라 하면 점 $(1,\ 5)$를 지나므로 $y-5=a(x-1)$

$\therefore y=ax-a+5$

$y=x^2,\ y=ax-a+5$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$\alpha,\ \beta$는 방정식 $x^2=ax-a+5$, 즉 $x^2-ax+a-5=0\cdots\cdots$ ㉠

의 근이다.

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각

$\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha,\ \frac{\beta^2}{\beta}=\beta$이고,

$\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{QO}}$이므로 $\alpha\beta=-1\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a-5=-1$ ($\because$근과 계수관계)

$\therefore a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=4x+1$

9. 직선 $x = 1 - y$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = px^2$, $y = qx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C, y 축과 만나는 점을 D 라 하고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 3 : a : 1$ 의 비례식이 성립되기 위한 상수 p, q 에 대하여 pq 의 값을 구하여라.(단, $q > p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$A(1,\ 0)$, $D(0,\ 1)$ 이고 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 3 : a : 1$ 이고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

비례식 $1 : \frac{1}{2} = (3k + ak + k) : (k + ak)$ 이 성립한다.

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 B 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, C $\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$

$y = px^2$ 가 B $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 를 지나므로 $p = 2$

$y = qx^2$ 가 C $\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$ 를 지나므로 $q = 30$

$\therefore\ pq = 60$

10. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{9}{8}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x - m)^2 + m - 1 + 2m^2$

$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.