1. 이차방정식 $3x^2+12x+3=0$ 의 한 근을 a 라고 할 때, $a+\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.(단,$a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

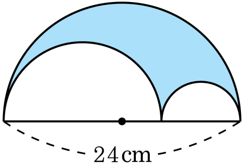
$3x^2+12x+3=0$ 의 한 근이 a 이므로 $3x^2+12x+3=0$ 에 a 를 대입하면

$a^2+4a+1=0$,

각 항을 a 로 나누면 $a+4+\frac{1}{a}=0$,

$\therefore\ a+\frac{1}{a}=-4$

2. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 색칠한 부분의 넓이가 $32\pi\,\text{cm}^2$ 일 때, 가장 작은 반원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ **답 :** ______ cm

▷ **정답 :** 4 cm

해설

가장 작은 반원의 반지름의 길이를 x cm 라 하면 두 번째로 큰 반원의 반지름의 길이는 $(12-x)$ cm 이므로

$$\frac{1}{2}\pi\times 12^2-\frac{1}{2}\pi\times x^2-\frac{1}{2}\pi\times(12-x)^2=32\pi$$

$$2x^2-24x+64=0$$

$$x^2-12x+32=0$$

$$(x-4)(x-8)=0$$

따라서 $x=4$ $(\because 0<x<6)$ 이다.

3. 이차방정식 $3x^2-6x+k+2=0$의 근의 개수가 1개일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $3x^2-6x+k+2=0$은 중근을 갖는다.

$3x^2-6x+k+2=0$

$3(x^2-2x)=-k-2$

$3(x^2-2x+1)=-k-2+3$

$3(x-1)^2=-k+1$

중근을 가져야 하므로 $-k+1=0$

$\therefore\ k=1$

4. x^2 의 계수가 1 인 어떤 이차방정식을 x 의 계수를 잘못 보고 풀었더니 해가 1, 5 이었고, 상수항을 잘못 보고 풀었더니 해가 -2, -4 이었다. 이 방정식의 옳은 근은?

① 2, 5 ② 2, -5 ③ 1, 5
④ 1, 2 ⑤ -1, -5

해설

원래 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ 이라 하면
$b=1\times 5=5$, $-a=-2+(-4)=-6$, $a=6$
따라서 $x^2+6x+5=0$, $(x+1)(x+5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-5$

해설

$(x-1)(x-5)=0$, $x^2-6x+5=0$
일차항의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 5
$(x+2)(x+4)=0$, $x^2+6x+8=0$
상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 6
따라서 $x^2+6x+5=0$, $(x+1)(x+5)=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=-5$

5. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1 인 이차방정식은?

① $x^2+6x-2=0$
② $x^2-6x+2=0$
③ $x^2+6x-4=0$
④ $x^2-6x+4=0$
⑤ $x^2+6x-6=0$

해설

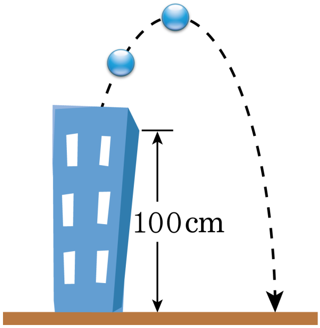
α, β 는 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이므로
$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$
구하는 방정식의 두 근이 $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$ 이므로

$$(\text{두 근의 합})=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$
$$=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=6$$

$$(\text{두 근의 곱})=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+4=0$ 이다.

6. 지면으로부터 100m 되는 건물의 높이에서 초속 40m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 40t + 100$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 지면으로부터 160m 인 지점을 지날 때부터 최고점에 도달하기까지 걸리는 시간과 최고점의 높이는?



① 2 초, 170m ② 3 초, 175m ③ 2 초, 175m

④ 3 초, 180m ⑤ 2 초, 180m

해설

$-5t^2 + 40t + 100 = 160$

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t-2)(t-6) = 0$

$\therefore\ t = 2$ 또는 $t = 6$

물체가 올라갔다 떨어지는 것이므로 처음으로 160m 를 지나는 시간부터 최고점까지

올라가는데 걸리는 시간은 두 시간 간격사이의 절반이다.

$t = \frac{6-2}{2} = 2(\text{초})$

최고점까지의 거리는 물체가 4 초만큼 움직인 거리이므로

$h = -5t^2 + 40t + 100$

$= -5(4^2) + 40 \times 4 + 100$

$= 180(\text{m})$

7. 이차방정식 $x^2+kx-14k=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, k 의 값을 구하여라.(단, k 는 소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

이차방정식 $x^2+kx-14k=0$ 에서

$x=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2+56k}}{2}$ 에서

두 근이 정수이기 위해서는 $k^2+56k=m^2$ (m 은 정수) 이어야 한다.

즉, $m^2=k(k+56)$

여기서 m^2 은 k 의 배수이고 k 는 소수이므로 m 은 k 의 배수이다.

따라서 $m=ka$ (a 는 정수) 라고 하면 $(ka)^2=k(k+56)$ 이므로

$k^2a^2-k^2=56k$

$k(a^2-1)=56$, $k(a+1)(a-1)=56$

이때, k 는 소수, $a+1$ 과 $a-1$ 의 차가 2 이므로

$$\begin{aligned}k(a+1)(a-1)&=56\\&=7\times4\times2\\&=7\times(-4)\times(-2)\end{aligned}$$

$\therefore\ k=7$

8. 서로 다른 두 실수 $p,\ q$ 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족할 때, 이차방정식 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 의 근의 개수를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

서로 다른 두 실수 $p,\ q$ 가 $p^2 + ap + b = 0, q^2 + aq + b = 0$ 을 만족하므로
$x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근을 가진다.
따라서 $D = a^2 - 4b > 0 \ \cdots$ ㉠
$x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서
$D = (a - 2c)^2 - b(b - ac) = a^2 + 4c^2 - 4b$
그런데 ㉠에서 $a^2 - 4b > 0$ 이고 $4c^2 \geq 0$ 이므로
$a^2 + 4c^2 - 4b > 0$
따라서 $x^2 - (2c - a)x - ac + b = 0$ 에서 $D > 0$ 이므로 서로 다른 두 근을 가진다.

9. 연속하는 다섯 개의 자연수가 있다. 가장 큰 수의 제곱에서 가장 작은 수의 제곱을 뺀 값을 a, 다섯 개의 수를 모두 더한 값을 b 라 할 때, $a+b=104$ 이다. 이때, 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

연속하는 다섯 개의 자연수를 $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$ (단, $n>2$ 인 자연수) 라 하면

$(n+2)^2-(n-2)^2=8n=a$

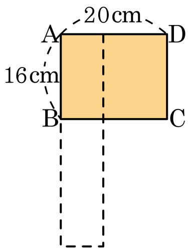
$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=5n=b$

$8n+5n=104$

$\therefore\ n=8$

따라서 가장 큰 수는 10 이다.

10. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 20cm, 16cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 매초 2cm 씩 줄어들고, 세로의 길이는 매초 4cm 씩 늘어난다고 할 때, 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지는데 걸리는 시간은?



① 2 초 ② 4 초 ③ 6 초

④ 8 초 ⑤ 10 초

해설

구하는 시간을 x초 라 하면

처음 넓이는 $20 \times 16 = 320$

x 초 후의 넓이는 $(20-2x)(16+4x)$ 이다.

따라서 $(20-2x)(16+4x) = 320$

$-8x^2 + 48x = 0 \rightarrow x(x-6) = 0$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$