

1. $\alpha = 1 + i, \beta = 1 - i$ 일 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① i

② $-i$

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1-i)^2 + (1+i)^2}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(1-2i+i^2) + (1+2i+i^2)}{1-i^2} \\ &= \frac{2+2i^2}{1-(-1)} = \frac{2-2}{2} = 0\end{aligned}$$

2. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으려면?

① $2 + i$ 의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$ 는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1 + \sqrt{3}i$ 의 켈레복소수는 $1 - \sqrt{3}i$ 이다.

⑤ $1 - \frac{1}{i}$ 는 실수이다.

해설

① $2 + i$ 의 허수부분 : i (×)

② $-5i$ 는 순허수 (○)

③ $i^3 = -i$ 허수 (○)

④ $\overline{1 + \sqrt{3}i} = 1 - \sqrt{3}i$ (○)

⑤ $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$ 복소수 (×)

3. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + 3^3 = 0, (x + 3)(x^2 - 3x + 9) = 0$$

$$\therefore x = -3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{합} : -3 + \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

4. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

(좌변) $= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로

$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0, b = 1$

$\therefore a + b = 1$

5. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면

$$(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$$

$$(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$$

$$(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-3b+3=0, 3a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$$

$$\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$$

6. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② -4

③ 8

④ -8

⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$ 이므로

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$

7. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{의 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore a = -3, \text{ 나머지 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

8. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}, 2$

② $-1 + \sqrt{2}, -3$

③ $1 - \sqrt{2}, 3$

④ $1 - \sqrt{2}, -3$

⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$$\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

9. 복소수 $x = a + bi$ (a, b 는 실수)가 $x^2 = 3 + 4i$, $x^3 = 2 + 11i$ 를 만족할 때 $a + b$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 \times x \\&= (3 + 4i)(a + bi) \\&= (3a - 4b) + (4a + 3b)i \\(3a - 4b) + (4a + 3b)i &= 2 + 11i \\3a - 4b &= 2, 4a + 3b = 11 \\ \therefore a = 2, b = 1 &\text{ 이므로 } a + b = 3\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^3}{x^2} = a + bi \\ \frac{2 + 11i}{3 + 4i} &= \frac{(2 + 11i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\&= \frac{50 + 25i}{25} \\&= 2 + i \\ \therefore a = 2, b = 1\end{aligned}$$

10. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 을 풀면?

① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$

② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$

③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$

⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$$x(x+6) = x^2 + 6x$$

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + 6x = X \text{ 로 놓으면}$$

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$$

$$X(X+8) + 15 = 0,$$

$$X^2 + 8X + 15 = 0$$

$$(X+3)(X+5) = 0$$

$$\therefore X = -3, X = -5$$

$$\textcircled{㉠} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$$

$$\textcircled{㉡} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$$

$$(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$$

11. 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② 1

③ -1

④ i

⑤ -2

해설

한 근이 α 이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

양변에 $\alpha - 1$ 를 곱하면,

$$\alpha^3 - 1 = 0, \therefore \alpha^3 = 1$$

$$\therefore \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$= \alpha^3(\alpha^2 + \alpha + 1) + \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$= 0$$

12. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

① 30

② 25

③ 23

④ 18

⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

$$\text{i) } D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0 \\ \therefore a < -8 \text{ 또는 } a > 4$$

$$\text{ii) } a > 0$$

$$\text{iii) } 8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$$

$$\therefore 4 < a < 8 \text{ 이므로 } a = 5, 6, 7$$

13. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

㉤ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\alpha = \bar{\beta} \text{이므로 } \beta = a - bi$$

$$\therefore \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$\therefore \alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 실수이다.

㉡ : ㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b 는

실수이므로 $a = 0, b = 0$ 즉, $\alpha = a + bi = 0$ 이다.

㉢ : (반례) $\alpha = i, \beta = 1$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$$

㉤ : (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

$$\therefore \alpha + \beta i = 0$$

$\therefore$ ㉢, ㉤는 α, β 가 실수일 때만 성립한다.

14. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^3 + 5x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

② $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$

③ $\frac{5}{2}(2 \pm \sqrt{3}i)$

④ $\frac{7}{2}(3 \pm \sqrt{3}i)$

⑤ $\frac{9}{2}(4 \pm \sqrt{3}i)$

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3 + \frac{1}{x^3} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x + \frac{1}{x}\right) + 3x \\&= 3x \\&= \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)\end{aligned}$$

15. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{3}{4}$

③ -1

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$