1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서

$x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-10=0,\ (t+5)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

4. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$ (나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ (다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

5. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

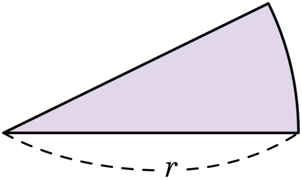
① $1 - \sqrt{2}$, 2 ② $-1 + \sqrt{2}$, -3 ③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20 - 2r)\text{cm}$

부채꼴의 넓이를 y라 하면

$$y = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = (10 - r)r = -(r - 5)^2 + 25$$

따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 5 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^2를 가진다.

8. 과학 탐구 반 학생들이 물 로켓을 발사하는데 위로 똑바로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t-8t^2)$m 이다. 이 때 물 로켓이 올라갈 수 있는 최대 높이는?

① 30m ② 35m ③ 40m ④ 45m ⑤ 50m

해설

높이를 h 라 하면

$$h=-8t^2+40t=-8\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+50$$

$\therefore$ 50m

9. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자

$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$

$Y=-2$ 또는 $Y=6$

$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$

$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\quad x^4-4x^2-12$

$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

10. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가) $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$ 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

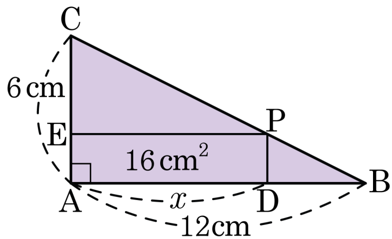
α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$

$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$

따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.

11. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$ 인 직각삼각형 ABC 의 빗변 위에 점 P 를 잡아 직사각형 EADP 를 만들었을 때, 이 직사각형의 넓이가 16cm^2 이었다. 이 때, $\overline{AD}$ 의 길이를 구하면? (단, $\overline{AD} > 6\text{cm}$)



① 7cm ② 8cm ③ 9cm ④ 10cm ⑤ 11cm

해설

$\triangle CEP \backsim \triangle CAB$ (AA닮음) 이므로

$\overline{CE} : \overline{EP} = \overline{CA} : \overline{AB}$

즉, $\overline{CE} : x = 6 : 12$

$\therefore \overline{CE} = \dfrac{1}{2}x$

따라서 $\overline{EA} = 6 - \dfrac{1}{2}x$ 이므로 $x\left(6 - \dfrac{1}{2}x\right) = 16$

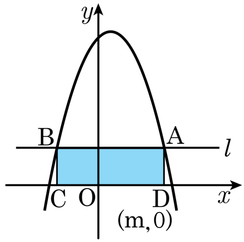
$-\dfrac{1}{2}x^2 + 6x = 16$

$x^2 - 12x + 32 = (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = 8$

그런데 $6 < x < 12$ 이므로 $x = 8(\text{cm})$

12. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은? $\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\left\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\right\}$

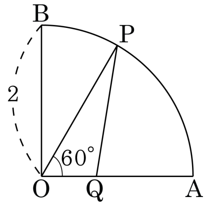
$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

13. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60^\circ$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?

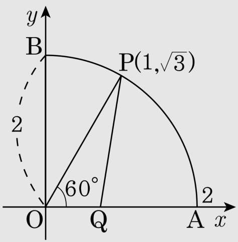


① $\frac{13}{4}$　② $\frac{7}{2}$　③ $\frac{15}{4}$

④ $\frac{17}{4}$　⑤ $\frac{9}{2}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

이 때, $Q(x,\ 0)$ 로 놓으면 $(0 < x < 2)$

$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 갖는다.

14. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60 ② 65 ③ 68 ④ 72 ⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \cdots$ ①

$\therefore \;\; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

① 에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \;\; 21b + 44 = 65$

15. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$일 때, $x + \frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$ ② $-1 - \sqrt{6}$ ③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}^2 = 0$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x}^2\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$로 놓으면

$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0,\ t^2 + 2t - 5 = 0$

$\therefore\ t = -1 \pm \sqrt{6}$

(ii) $x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$

그런데 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$이므로

($\because$ x는 실수)

$$\therefore\ x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$$