

1. 방정식 $|x| + |x - 1| = 2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 2$ 이므로 $-2x + 1 = 2$
 $\therefore x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 2$ 이므로 $0 \cdot x = 1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \leq x$ 일 때,
 $x + x - 1 = 2$ 이므로 $2x = 3$
 $\therefore x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서

i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - x + 1 = 9$$

$$\therefore x = -4$$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$x - x + 1 = 9 \text{ (성립하지 않음)}$$

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x + x - 1 = 9$$

$$\therefore x = 5$$

따라서 모든 근의 곱은

$$(-4) \times 5 = -20$$

3. $|x+1|+|x-2|=x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-x-1-x+2=x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1-x+2=x+3$
 $\therefore x = 0$
iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1+x-2=x+3$
 $\therefore x = 4$

4. $|x - 2| + |x - 3| = 1$ 을 만족하는 실수 x 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개이상

해설

$|x - 2| + |x - 3| = 1$ 에서
i) $x < 2$ 일 때,
 $-(x - 2) - (x - 3) = 1$
 $\therefore x = 2$ (성립하지 않음)
ii) $2 \leq x < 3$ 일 때,
 $(x - 2) - (x - 3) = 1$
 $\therefore 0 \cdot x = 0$ (모든 실수)
iii) $x \geq 3$ 일 때,
 $(x - 2) + (x - 3) = 1$
 $\therefore x = 3$

5. $|x - 1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x - 1| = 3 - |x|$ 에서,
 $|x| + |x - 1| = 3$ 이다.
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 3$
 $\therefore x = -1$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 3$
 $0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + (x - 1) = 3$
 $\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

6. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$
ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

7. 다음 방정식의 해는?

$x^2 - 5|x| + 6 = 0$

- ① 0, ±1
- ② 0, ±2
- ③ ±1, ±2
- ④ ±2, ±3
- ⑤ ±3, ±4

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서
 $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x - 2)(x - 3) = 0$
 $\therefore x = 2, \text{ 또는 } x = 3$
(ii) $x < 0$ 일 때,
 $x^2 + 5x + 6 = 0$
 $(x + 2)(x + 3) = 0$
 $\therefore x = -2, \text{ 또는 } x = -3$
(i), (ii)에서 $x = \pm 2, x = \pm 3$

8. 다음 방정식의 해는?

$x^2 + 3|x| - 4 = 0$

- ① 0
- ② ±1
- ③ ±√2
- ④ ±√3
- ⑤ ±2

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때 $|x| = x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 + 3x - 4 = 0, (x + 4)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$ 이므로 $x = -4$ 는 부적합
 $\therefore x = 1$
(ii) $x < 0$ 일 때 $|x| = -x$ 이므로 주어진 방정식은
 $x^2 - 3x - 4 = 0, (x - 4)(x + 1) = 0$
 $x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -1$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$ 이므로 $x = 4$ 는 부적합
(i), (ii) 에서 $x = \pm 1$

9. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$ 일 때
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$
(i), (ii) 에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

10. 방정식 $(x-1)^2 + |x-1| - 6 = 0$ 의 두 근의 합은?

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 + x - 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x-3)(x+2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$x = -2, x = 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 3$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 - x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$$

$$x = -1, x = 4$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -1$

(i), (ii) 에서 $x = 3, -1$ 이므로

두 근의 합은 2

11. 방정식 $x^2 + |x| = |x - 1| + 5$ 를 만족하는 두 근의 곱은?

㉠ $-2\sqrt{6}$

㉡ $-\sqrt{6}$

㉢ 0

㉣ $\sqrt{6}$

㉤ $2\sqrt{6}$

해설

i) $x < 0$ 일 때
 $x^2 - x = -(x - 1) + 5, x^2 = 6$
 $\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -\sqrt{6}$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때
 $x^2 + x = -(x - 1) + 5$
 $x^2 + 2x - 6 = 0$
 $\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해가 없다.
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 + x = x - 1 + 5, x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 2$
i), ii), iii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$ 이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

12. 이차방정식 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$ 의 두 근의 곱은?

- ① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

i) $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5$
ii) $x < 0$ 일 때,
 $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1) = 0$
 $\therefore x = -5$
i), ii)에서 두 근의 곱은 -25 이다.

13. 이차방정식 $x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 의 해는 ?

① $-2, 4$

② $-2, 2$

③ $-4, 4$

④ $-4, 2$

⑤ $-4, -2, 2, 4$

해설

$x^2 + 2|x| - 8 = 0$ 에서

i) $x > 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x + 4)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 2$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

ii) $x < 0$ 일 때,

$x^2 + 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

i), ii)에서 구하는 해는 $-2, 2$

14. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ ($0 < x < 4$)의 모든 근의 합은?

- ① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}$ ③ 3 ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ 에서
(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
 $x^2 - 4 = 0, (x + 2)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$
그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
 $x^2 - 5 = 0, (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$
 $\therefore x = -\sqrt{5}$ 또는 $x = \sqrt{5}$
그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 해가 없다.
(iii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로
 $x^2 - 6 = 0, (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6}) = 0$
 $\therefore x = -\sqrt{6}$ 또는 $x = \sqrt{6}$
그런데 $2 \leq x < 3$ 이므로 $x = \sqrt{6}$
(iv) $3 \leq x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로
 $x^2 - 7 = 0, (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7}) = 0$
 $\therefore x = -\sqrt{7}$ 또는 $x = \sqrt{7}$
그런데 $3 \leq x < 4$ 이므로 해가 없다.
따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

15. $0 < x < 2$ 일 때, 방정식 $2x^2 - x - 3[x] = 0$ 의 모든 해의 합은?(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x^2 - x - 3[x] = 0$ 에서 $0 < x < 2$ 이므로

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로

$$2x^2 - x = 0, x(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로

$$2x^2 - x - 3 = 0, (x + 1)(2x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } \frac{3}{2}$$

그런데 $1 \leq x < 2$ 이므로 $x = \frac{3}{2}$

따라서 모든 해의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

16. 방정식 $\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x - \frac{1}{2}\right] - 7 = 0$ 의 해 $a \leq x < b$ 또는 $c \leq x < d$ 에 대하여 $a + b + c + d$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\left[x - \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right] - 1 \text{ 이므로}$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right]^2 - 3\left[x + \frac{1}{2}\right] - 4 = 0$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = 4 \text{ 또는 } \left[x + \frac{1}{2}\right] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 이다}$$

따라서 구하는 값은

$$\therefore a + b + c + d = 6$$

17. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① $-1 \leq x < 0$ ② $-1 \leq x < 1$ ③ $-1 \leq x < 2$
④ $0 \leq x < 1$ ⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$[x] = -1 \text{ 또는 } [x] = -\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 은 정수이므로 $[x] = -1$

$$\therefore -1 \leq x < 0$$

18. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$ 의 해를 $a \leq x < b$ 라 할 때, $2a + b$ 의 값을 구하면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = 1$

$$\therefore 1 \leq x < 2$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \text{ 이므로 } 2a + b = 4$$

19. 구간 $0 < x < 5$ 에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

- ① 2개
- ② 3개
- ③ 4개
- ④ 5개
- ⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$ 이므로 x 는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$ 를 곱하면
 $x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0, x^2 - 1 = 0$
 $\therefore x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$ 에 속하지 않는다.
 $\therefore$ 해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1, x^2 - x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 $1 < x < 2$ 이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$
 $\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
 $2 < x < 3$ 이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$ 일 때 $[x] = 3$
 $\therefore x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $3 < x < 4$ 이므로 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$ 일 때 $[x] = 4$
 $\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$
 $x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
 $4 < x < 5$ 이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x 의 개수는 4개

20. x 보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x 보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $\langle x \rangle$ 로 나타낼 때, 방정식 $[x] + \langle x \rangle = 7$ 의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$

② $3 \leq x \leq 4$

③ $3 \leq x < 4$

④ $3 < x \leq 4$

⑤ $3 < x < 4$

해설

x 가 정수 k 일 때,
 $[x] = \langle x \rangle = k$
 $k < x < k + 1$ 일 때,
 $[x] = k, \langle x \rangle = k + 1$
따라서 $[x] + \langle x \rangle = 7$ 이고
 $[x], \langle x \rangle$ 는 정수이므로
 $[x] = 3, \langle x \rangle = 4$ ($\because [x] \leq \langle x \rangle$)
 $\therefore 3 < x < 4$